

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ
À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À
TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR
RENÉE GAGNON

EFFETS DE LA STRUCTURE DE CONNAISSANCES, DE LA
CATÉGORIE DE PROBLÈMES ET DE L'OPÉRATEUR
SUR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS
PAR LES ÉLÈVES DE 3E ANNÉE DU PRIMAIRE

MAI 1995

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

La recherche qui fait l'objet du présent mémoire a pour but d'étudier les performances des sujets en situation de résolution de problèmes additifs. Ces performances sont mises en relation avec les résultats des sujets aux épreuves piagésiennes d'inclusion des classes. L'étude a été réalisée afin de vérifier les effets de la structure sémantique de l'énoncé du problème: avec ou sans structure catégorielle, de la catégorie de problème: problèmes de comparaison d'états relatifs et problèmes de transformation d'états relatifs, et de l'opérateur sémantique: positif ou négatif.

L'originalité de la recherche repose, d'abord, sur le fait que soient étudiés conjointement, deux domaines d'études: la résolution de problèmes arithmétiques et le traitement de la structure de connaissances relative aux catégories naturelles. L'utilisation de cette dernière dans la formulation de l'énoncé propose un point de vue nouveau puisqu'elle permet d'examiner l'effet d'interaction de deux structures cognitives, la structure conceptuelle et les connaissances relatives aux problèmes additifs, qui, toutes deux, mettent en cause une relation de partie à tout. De plus, la résolution de problèmes additifs comportant des états relatifs est particulièrement intéressante étant donné que peu de recherches ont été menées relativement à cette catégorie de problèmes.

Les résultats de l'expérience menée auprès de 44 sujets de 3^e année du primaire, montrent qu'il n'y a pas de corrélation entre les performances aux épreuves piagésiennes d'inclusion de classes et la résolution des problèmes additifs. De plus, ils ne montrent pas d'effet simple des variables structure de connaissances, catégorie de problème et opérateur. Par ailleurs, nous avons pu observer un effet significatif de la combinaison de deux d'entre elles: catégorie de problèmes et opérateur, sur les performances des sujets des deux groupes de notre expérience.

La recherche analyse aussi les conduites de résolution et de formulation de problèmes d'un groupe restreint de sujets. Cette analyse nous permet de faire des hypothèses sur les relations effectuées par les sujets entre les données du problème. Il en ressort, entre autres, que les sujets considèrent les états relatifs comme des états, ce qui leur permet de traiter les données du

problème plus facilement. En ce qui concerne les problèmes de comparaison d'états relatifs, la recherche montre que, dans certains cas, la procédure de résolution effectuée, notamment une soustraction, ne repose pas sur un calcul relationnel pertinent mais plutôt sur l'indice sémantique contenu dans l'expression "de moins" qui suggère cette opération arithmétique. Par ailleurs, pour les problèmes de transformation d'états relatifs sollicitant un opérateur négatif, il semble que l'identification du registre par le sujet soit difficile à effectuer puisque la situation d'emprunt peut être interprétée en termes de gain pour l'emprunteur (état) ou comme la diminution d'un avoir pour le prêteur (état) plutôt que comme l'augmentation d'une dette (état relatif) pour celui qui emprunte.

Enfin, la recherche met en évidence l'importance que la didactique des mathématiques devrait accorder au calcul relationnel réalisé par l'élève et aux adaptations qu'il doit réaliser pour traiter à partir de ses cadres de pensée, les énoncés de problèmes. En effet, la représentation du problème construite par l'élève dépend de ses connaissances sur le monde, de sa conception du nombre et des activités cognitives qui lui permettent d'opérer sur le nombre.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	ii
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES.....	viii
REMERCIEMENTS	ix
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I	
Problématique et cadre théorique de la recherche	4
LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS	5
1. La représentation symbolique du nombre et des opérations	6
A. La construction du nombre par la synthèse opératoire de l'ordre et de l'inclusion hiérarchique	9
B. L'inclusion hiérarchique des classes	12
2. La résolution de problèmes additifs élémentaires	16
A. Les classifications de problèmes additifs	17
B. Les problèmes de transformation	22
C. Les problèmes de comparaison	27
LA STRUCTURE DE CONNAISSANCES	31
1. La compréhension de l'énoncé	32
2. La structure conceptuelle	34
A. Le modèle classique	36

B. Le modèle de Rosch	38
1. <i>Le niveau de base</i>	39
2. <i>La typicité du concept</i>	42
PROBLÉMATIQUE ET HYPOTHÈSES DE LA RECHERCHE	45
CHAPITRE II	
Description de l'expérience	49
PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE	50
1. La sélection des sujets	51
2. Le matériel expérimental	52
A. L'épreuve d'inclusion	52
B. L'établissement des prototypes	54
C. L'élaboration des problèmes en vue de l'analyse quasi-expérimentale	55
D. L'élaboration des problèmes en vue de l'analyse des conduites de résolution	58
PLAN EXPÉRIMENTAL	61
DÉROULEMENT DE L'EXPÉRIMENTATION	63
Première étape: l'épreuve d'inclusion	63
Deuxième étape: la recherche de prototypes	63
Troisième étape: la résolution des problèmes en vue de l'analyse quantitative	63
Quatrième étape: la résolution et la formulation des problèmes en vue de l'analyse des conduites de résolution	64

CHAPITRE III

Analyse et interprétation des résultats	66
ANALYSE DES RÉSULTATS	67
A. Analyse préliminaire	68
B. Analyses statistiques	69
1. Performance de l'étude fleurs/billes	69
1.2 Performances de l'étude oiseaux/gommes à effacer	74
ANALYSE DE PROTOCOLES	80
INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS	108
CONCLUSION	118
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	123
APPENDICE A	
Matériel expérimental	128
Épreuve d'inclusion des classes (fleurs)	129
Épreuve d'inclusion des classes (perles)	132
Résultats obtenus aux épreuves d'inclusions des classes	140
Recherche de prototypes	145
Problèmes soumis en vue de l'analyse quasi-expérimentale	150
Exemple de protocole	156
APPENDICE B	
Résultats comparés de l'épreuve d'inclusion des classes et de l'expérimentation	161

(Pour tableaux et figures, voir LISTE DES TABLEAUX et LISTE DES FIGURES)

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1	Exemples de catégories supérieure, de base et subordonnée	40
Tableau 2	Nombre d'attributs communs à différents niveaux hiérarchiques	41
Tableau 3	Résultats obtenus par les 44 sujets à l'épreuve d'inclusion des classes (fleurs)	141
Tableau 4	Résultats obtenus par les 44 sujets à l'épreuve d'inclusion des classes (perles)	143
Tableau 5	Liste des exemplaires cités pour la catégorie des "fleurs" par 43 sujets et ordonnés selon la fréquence de citation	146
Tableau 6	Liste des exemplaires cités pour la catégorie des "arbres" par 40 sujets et ordonnés selon la fréquence de citation	148
Tableau 7	Moyennes (\bar{x}) et écarts-types (s) des résultats obtenus selon la structure de connaissances (s_1/s_2), la catégorie de problèmes (p_1/p_2) et l'opérateur (o_1/o_2), pour l'étude fleurs/billes	70
Tableau 8	Analyse de variance des résultats obtenus selon la structure de connaissances (s_1/s_2), la catégorie de problèmes (p_1/p_2) et l'opérateur (o_1/o_2), pour l'étude fleurs/billes	71
Tableau 9	Moyennes (\bar{x}) et écarts-types (s) des résultats obtenus selon la structure de connaissances (s_1/s_2), la catégorie de problèmes (p_1/p_2) et l'opérateur (o_1/o_2), pour l'étude oiseaux/gommes à effacer ..	75
Tableau 10	Analyse de variance des résultats obtenus selon la structure de connaissances (s_1/s_2), la catégorie de problèmes (p_1/p_2) et l'opérateur (o_1/o_2), pour l'étude oiseaux/gommes à effacer ...	76

LISTE DES FIGURES

Figure 1	Signification du comptage et de la suite au niveau de la "chaîne sécable" (adaptée de Fuson, 1990, p.174)	8
Figure 2	Deux façons de compter les objets (reprise de Kamii, 1990, p. 33)	10
Figure 3	Structure hiérarchique de nombre (reprise de Kamii, 1990, p.35)	11
Figure 4	L'organisation de la mémoire sémantique d'après Collins et Quillian(1969) (reprise de Dubois, 1986, p. 74)	36
Figure 5	Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (fleurs) et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude fleurs/billes	162
Figure 6	Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (fleurs) et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude oiseaux/gommes à effacer	163
Figure 7	Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (perles) et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude fleurs/billes	164
Figure 8	Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (perles) et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude fleurs/billes	165
Figure 9	Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes avec structure catégorielle (fleurs)	73
Figure 10	Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes sans structure catégorielle (billes)	74
Figure 11	Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes avec structure catégorielle (oiseaux)	78
Figure 12	Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes sans structure catégorielle (gommes à effacer)	78

Mes plus sincères remerciements vont:

À madame Hélène Ziarko, professeure, qui a dirigé ce mémoire. Son assistance éclairée, le dévouement avec lequel elle a partagé ses connaissances avec moi et sa disponibilité m'ont été très précieux;

À madame Jacinthe Giroux, professeure, qui a codirigé ce mémoire. J'ai apprécié ses qualités de chercheure et son souci de me rendre accessibles ces nouvelles connaissances;

Leur *engagement* dans cette recherche en a permis la concrétisation.

À monsieur Marcel Dion et à madame Lucie Trudel, directeur et directrice de l'école Notre-Dame, de la commission scolaire de Chavigny de Trois-Rivières-Ouest pour leur collaboration, ainsi qu'à madame Monique Poulin, enseignante de 3^e année et aux élèves de l'école Notre-Dame qui ont obligeamment prêté leur concours à cette recherche.

À Claude et Den,

INTRODUCTION

La résolution de problèmes occupe une place de plus en plus importante dans l'enseignement en général et dans celui des mathématiques en particulier. Elle n'est plus considérée par les pédagogues comme un ensemble d'exercices pour consolider des procédures mathématiques (opérations), mais réfère plutôt à des situations-problèmes qui impliquent un investissement cognitif et affectif de la part de l'élève.

L'état actuel des connaissances en ce domaine nous conduit à définir un problème comme une situation comportant un état initial avec un but à atteindre. La situation est problématique pour un sujet dans la mesure où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire (Brun, 1990). La résolution du problème exige que le sujet élabore une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre le but.

Si l'école s'efforce par divers moyens de permettre à l'enfant de développer son habileté à "analyser et synthétiser", nous observons tout de même des taux d'échec alarmants aux épreuves d'appoint soumises par le ministère de l'Éducation aux élèves du premier cycle du primaire.

Ces résultats nous conduisent à penser que l'enseignement des mathématiques au primaire doit être revu à la lumière, notamment, des études portant sur la tâche cognitive à accomplir pour résoudre les problèmes ainsi que sur les processus et les comportements impliqués. En effet, plusieurs recherches menées au cours des vingt dernières années ont montré que la résolution de problèmes additifs n'est pas seulement le résultat de l'application mécanique d'une opération d'addition ou de soustraction. Dans ces travaux, qui relèvent de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques, la résolution de problèmes additifs nécessite la construction de la représentation d'un problème par l'élève, qui repose à la fois sur ses connaissances logico-mathématiques ainsi que sur ses connaissances sur le monde, sur les composantes relationnelles entre les données du problème et sur les procédures de résolution lui permettant d'opérer sur ces relations (Brun, 1990). Par ailleurs, quelle que soit la catégorie de problèmes identifiée par les

relations que l'on peut établir entre les données, on peut considérer que tous les problèmes additifs peuvent être interprétés selon une relation de type partie-tout.

La dimension sémantique de l'énoncé est une variable importante pour la mise en relation des données du problème sur laquelle s'appuie le calcul relationnel. Elle fait appel aux connaissances antérieures de l'élève qui doit résoudre le problème. Les connaissances procédurales concernent les savoir-faire sollicités lors de l'exécution d'une tâche comme la résolution d'un problème. Les connaissances déclaratives, dont celles qui portent sur les catégories naturelles, concernent les savoirs verbalisables sur le monde qui peuvent être sollicités lors de la lecture de l'énoncé.

Les représentations catégorielles ont des "effets facilitateurs sur un certain nombre de tâches, telles celles d'inclusion des classes..." (Richard, 1990). En effet, Richard explique que les propriétés relatives à des représentations catégorielles de base, notamment celles qui sont dénommées plus tôt par les enfants, sont de type "partie-de" ou "partie-tout".

Ainsi, la présente recherche réunit deux domaines d'études: celui qui concerne la résolution de problèmes mathématiques et celui qui concerne le traitement de la structure de connaissances relatives aux catégories naturelles. Elle vérifie les effets conjugués de la structure des représentations catégorielles dans les énoncés de problèmes, de la catégorie de problèmes et de l'opérateur sur la résolution des problèmes additifs.

Les résultats de cette recherche permettront, en premier lieu, de préciser l'importance des facteurs mis en cause dans la résolution de problèmes additif. En deuxième lieu, ils permettront de dégager des pistes d'interprétation des conduites d'élèves pouvant contribuer, dans une recherche ultérieure, à la mise en place de stratégies efficaces d'enseignement en résolution de problèmes additifs.

CHAPITRE I

Problématique et cadre théorique de la recherche

LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS

Les recherches sur la résolution de problèmes arithmétiques ont permis de mettre en évidence les connaissances impliquées dans l'activité de résolution. La résolution de problèmes arithmétiques nécessite « le développement des procédures de résolution et, donc, des manipulations opérées sur les nombres » (Fayol, 1991). Par conséquent, pour résoudre des problèmes arithmétiques, l'enfant doit posséder diverses compétences concernant le nombre, et, plusieurs variables doivent être prises en compte afin de comprendre les performances des élèves.

La résolution de problèmes arithmétiques et la construction du nombre sont en étroite relation. En effet, si les procédures de résolution mises en oeuvre par les enfants sont, en partie, tributaires de la représentation symbolique du nombre, c'est à travers la recherche de solutions de problèmes additifs variés que l'enfant construit les différentes propriétés du nombre.

En fait, comme le soutient Vergnaud (1991), c'est au fil de ses expériences que l'enfant construit une représentation symbolique du nombre et de ses propriétés. La pluralité des problèmes à résoudre lui permet de découvrir le nombre comme une relation d'équivalence ou une relation d'ordre, comme une relation ou comme une mesure, comme une relation entre les mesures ou, encore, comme une transformation qui opère sur un état.

Nous allons d'abord présenter les résultats de recherches qui portent sur la représentation symbolique du nombre, depuis les mots-nombres sans signification sémantique jusqu'à la construction d'une suite numérique dont les éléments sont emboîtés et sériés. Seront ensuite présentées les études sur la résolution de problèmes additifs et celles qui nous

permettent de mieux comprendre le rôle de la structure sémantique dans l'activité de résolution de problèmes.

1. La représentation symbolique du nombre et des opérations

Depuis longtemps, les processus de développement de la pensée logico-mathématique font l'objet d'études en psychologie cognitive; *La genèse du nombre* de Piaget et Szeminska (1941) est sans doute le premier ouvrage qui présente une explication théorique de la construction du nombre (Bideaud, 1991). Selon les études qui y sont publiées, les premières expériences de comptage du jeune enfant sont le résultat d'un calcul automatique « sans lien avec les relations mathématiques et les opérations » (Gelman et Meck, 1991). Les nombreuses recherches effectuées depuis la publication de cet ouvrage, tendent plutôt à démontrer que le jeune enfant développe très tôt des structures élémentaires de comptage et de raisonnement, lui permettant, dans certains cas, d'opérer sur les nombres. Elles montrent, de plus, que le champ conceptuel dans lequel s'élabore chez l'enfant la signification du nombre n'est pas facile à définir, ni à délimiter. Des premières appréhensions du nombre naturel et de ses propriétés à la compréhension des nombres relatifs et rationnels, l'élaboration du concept du nombre s'étend sur une période qui commence vers 2 ans et se prolonge jusqu'à vers 15 ans.

Plusieurs chercheurs ont tenté de préciser la relation existant entre le développement du concept de nombre et l'acquisition des procédures numériques, particulièrement les procédures de comptage. Les travaux de Fuson (1991), par exemple, apportent une perspective nouvelle quant à la construction du nombre par l'enfant. Inspirée du cadre des travaux piagétiens voulant que l'enfant « construise son propre chemin du nombre vers des concepts numériques de plus en plus complexes », la chercheuse a voulu montrer l'importance du comptage dans la construction par l'enfant des concepts de nombre cardinal,

de nombre ordinal et de nombre mesure, rôle plutôt délaissé par le modèle piagétien. Les résultats de ses recherches lui ont permis d'identifier cinq niveaux dans l'élaboration de la suite de nombres, chacun de ces niveaux étant accompagné d'une représentation de la suite des nombres et des relations entre les « mots de nombres ».

Au premier niveau dit « chapelet », l'enfant récite la suite de nombres comme une comptine. Les éléments sont dépourvus de signification et récités comme « une liste mécanique ». Les mots ne sont pas différenciés. Ils forment plutôt un tout non-décomposable pouvant être illustré de cette façon: « *undeuxtroisquatreceinsixsept* » (Fuson, 1991).

Au niveau de la « liste non sécable » qui lui succède, les mots-nombres sont « différenciés » et leur production suit un ordre précis; ils peuvent ainsi être associés à des objets et servir une activité de dénombrement. Les procédés de comptage alors mis en oeuvre consistent à associer chacun des éléments à un seul mot-nombre, le dernier mot-nombre correspondant à la mesure de la collection. Le comptage des objets débouche donc sur un résultat cardinal. La suite des nombres rappelés peut toutefois être non-conventionnelle puisqu'un enfant qui récite la suite de nombres de cette façon: un , deux, trois, quatre, deux... dira qu'il y a deux objets dans la collection. Selon Fuson, lorsque l'enfant a intégré la suite des premiers mots-nombres comme une « liste non sécable », il sait généralement effectuer de petites additions si les objets sont dans son champ perceptif (Giroux et Lemoyne, 1994).

Ensuite, au niveau de la « chaîne sécable » de la suite des mots-nombres, l'enfant commence à prendre en compte l'objet d'une suite comme représentant à la fois un terme de la suite et la somme des objets dénombrés. Cela signifie qu'il accorde à un mot-nombre non seulement une signification cardinale, mais également une signification dans la séquence des nombres en tant que dernier mot énoncé lors du comptage des objets. Ainsi, pour résoudre $5+3$, il peut partir du premier terme de l'addition et poursuivre le comptage par le recours à

une collection qui correspond au second terme. Le mot-nombre 5, est perçu comme le dernier mot énoncé lors du comptage des objets de la collection (la somme des objets comptés). Il peut donc partir de 5 pour résoudre l'addition.

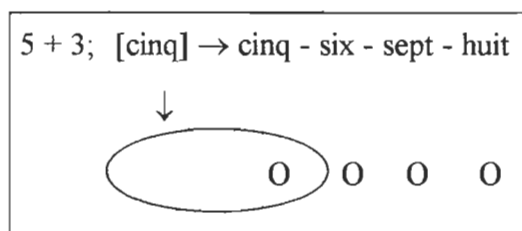


Figure 1: Signification du comptage et de la suite au niveau de la « chaîne sécable » (adaptée de Fuson, 1990, p. 174)

Ce niveau est aussi caractérisé par « le développement de la « flexibilité dans l'emploi de la suite verbale » » (Fayol, 1990). En effet, l'enfant peut énoncer la suite numérique à partir de n'importe quel nombre de la suite, il peut aussi compter à rebours et établir des relations ordinales entre les nombres.

Au niveau de la « chaîne unitaire », chaque nombre de la suite représente une « entité cardinale » (Fuson, 1991) et peut être dénombré. Les nombres sont énoncés et dénombrés autant de fois que le nécessite l'opération à réaliser. On observe alors l'apparition de stratégies évoluées de comptage pour effectuer des additions et des soustractions. Par exemple, l'une des conduites observées par l'auteure pour résoudre $6 + 8$, consiste à énoncer: « neuf ça fait un, dix ça fait deux, onze ça fait trois..., quatorze ça fait six ».

Le dernier niveau correspond à la « chaîne bidirectionnelle ». À ce niveau, se produit l'achèvement de la construction de la suite de nombres, puisqu'elle devient « une suite numérique « unitisée », sériée et emboîtée » (Fuson, 1991). Ainsi, chaque terme est distinct, ordonné dans la suite, et équivalent à la somme des autres termes. Selon Fuson, c'est à ce

niveau que l'enfant construit des relations entre « terme/terme/somme » lui permettant d'effectuer des compositions et des décompositions afin de rendre les additions et les soustractions plus faciles. Pour Steffe (1991), la suite est explicitement emboîtée lorsque l'enfant établit des relations numériques de partie à tout, c'est-à-dire lorsqu'un mot-nombre,

« par exemple « sept », se rapporte à une unité qui peut être itérée sept fois, aussi bien qu'à une unité contenant la suite verbale des nombres jusqu'à sept inclus. »

(Steffe, 1991, p. 130)

Cette étude nous permet de mieux saisir l'enjeu conceptuel des premières procédures de quantification et de mieux comprendre le rôle du comptage dans le développement des conceptualisations relatives au nombre. En effet, les premières élaborations du concept de nombre reposent sur une variété de schèmes de dénombrement et de comptage pour traiter et résoudre des situations de mesure et de comparaison de collections, d'addition et de soustraction (Vergnaud, 1991). On observe donc que l'acquisition de la suite de nombres par l'enfant lui permet de développer des procédés de calcul facilitant la résolution des problèmes d'addition et de soustraction.

A. La construction du nombre par la synthèse opératoire de l'ordre et de l'inclusion hiérarchique

L'intérêt des travaux de Piaget (1941) sur le concept de nombre repose sur l'identification des structures logico-mathématiques associées à ce concept. Au fil de ses expériences, le jeune enfant construit ces structures en établissant des relations parmi les objets. Ainsi, lorsqu'un enfant dit qu'un jeton est « rouge », il ne tient pas compte des autres propriétés de l'objet comme son poids. C'est ce que Piaget appelle « l'abstraction simple » qui correspond au fait que l'enfant extrait de la réalité globale de l'objet unique considéré, la propriété grâce à laquelle, il l'identifie. « Par opposition, l'abstraction réfléchissante inclut la

construction de relations entre/parmi des objets » (Kamii, 1990). Ainsi, lorsque l'enfant peut dire qu'un jeton rouge est « différent » d'un jeton bleu, c'est qu'il est en mesure de construire mentalement des relations entre deux objets. C'est à partir de telles activités que se développe la structure logico-mathématique.

Quand Piaget affirme que le concept du nombre se fait par le recours à l'abstraction réfléchissante, il soutient que le nombre se construit par la synthèse opératoire de deux relations entre les objets: l'ordre et l'inclusion. Par relation d'ordre, il entend l'opération mentale qu'effectue l'enfant pour ordonner les nombres. Nous rapportons ici les illustrations proposées par Kamii (1990) qui montrent comment l'enfant dispose mentalement les objets à compter dans une relation d'ordre. Dans la figure 2, la procédure A correspond à la façon dont compte un enfant qui ne ressent pas le besoin d'ordonner les objets et qui, par conséquent commet des erreurs, tandis que la procédure B illustre la façon dont un enfant place mentalement les objets en relation ordonnée.

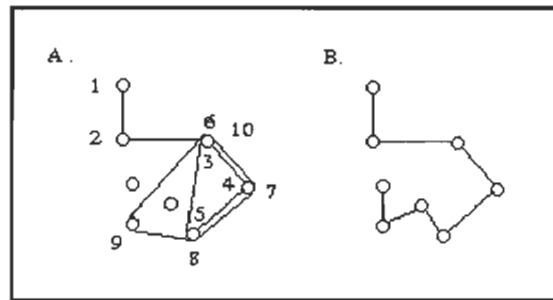


Figure 2: Deux façons de compter les objets
(reprise de Kamii, 1990, p. 33)

Par ailleurs, pour quantifier une collection d'objets, l'enfant doit aussi avoir placé ces objets en relation d'inclusion hiérarchique. Pour être en mesure de dire qu'une collection comprend dix objets, l'enfant doit mentalement établir des relations successives d'inclusion entre ces dix objets. En effet, le comptage de la collection implique que un est inclus dans

deux, deux est inclus dans trois, ... et ainsi de suite. La synthèse de ces deux opérations mentales conduit ainsi l'enfant à construire une suite numérique dont les nombres sont emboîtés et sériés (Steffe, 1991; Fuson, 1991).

Kamii (1990) propose une représentation de cette structure hiérarchique du nombre que nous rapportons ci-dessous. Dans la figure 3, la procédure A montre que le terme "huit" est utilisé pour nommer le dernier objet d'un ensemble tandis que la procédure B illustre la série d'inclusions réalisées par l'enfant: un dans deux, deux dans trois,... sept dans huit. Le recours à cette procédure indique que l'enfant est alors capable de considérer le dernier objet à la fois du point de vue ordinal (le huitième objet compté) et du point de vue cardinal (huit est la mesure de la collection).

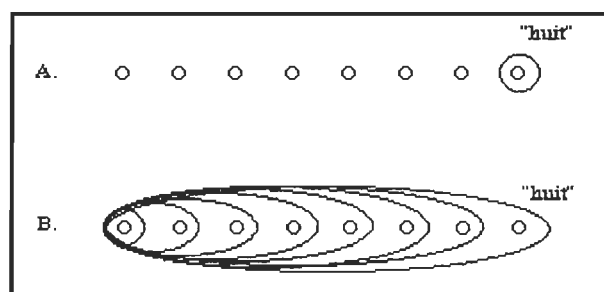


Figure 3: Structure hiérarchique de nombre
(reprise de Kamii, 1990, p.35)

Lorsque l'enfant comprend que le dernier nombre (exemple: "huit") énoncé correspond à la mesure de la collection, il accorde une signification cardinale au comptage. Il est alors en mesure d'utiliser le comptage pour:

"explorer les effets numériques des transformations au cours d'épreuves de conservation (par exemple, Gelman, 1982a), pour apprendre les tables d'additions et de soustractions (Siegler et Shrager, 1984), et pour comprendre des problèmes arithmétiques élémentaires (par exemple, Carpenter et Moser, 1984)."

(Sophian, 1991, in Bideaud et al, p.53)

Selon Piaget, c'est lorsque l'enfant a atteint le stade de la pensée réversible que la structure hiérarchique d'inclusion de classe est construite. Elle lui permet alors d'effectuer simultanément deux actions opposées: diviser le tout en parties et réunir les parties en un tout. En établissant différentes relations sur différents contenus, l'enfant peut accroître la mobilité de sa pensée, et « l'un des résultats de cette mobilité est la structure logico-mathématique » (Kamii, 1990, p.36).

B. L'inclusion hiérarchique des classes

Les travaux de Piaget sur le développement cognitif de l'enfant lui ont permis d'établir que les premiers apprentissages consistent en l'élaboration de schèmes sensori-moteurs. Pour ce faire, l'enfant construit une relation entre l'information perceptive reçue et ses activités motrices. Un schème sensori-moteur peut être conçu comme un plan qui permet d'effectuer une série d'actions dans le but de réaliser un acte précis. Lorsque ces actions et ces conséquences sont intériorisées, il n'est plus nécessaire de reproduire une action pour en connaître les conséquences, la situation complète peut être anticipée par simulation mentale (Lindsay et Norman, 1980).

Ces représentations internes sont essentielles aux opérations de la pensée. En effet, l'organisation et la structuration de l'information perceptive en schème (ou schéma) permet le développement de processus mentaux supérieurs. Pour Piaget, un schème

"comporte en compréhension, une mise en relation des propriétés des objets auxquels s'applique le schème...; en extension, une suite d'objets et de situations auxquels il est susceptible d'être appliqué".

(Piaget, 1972, p.22)

Ainsi, l'élaboration d'une classe d'objets nécessite deux types de relations. Il s'agit, d'une part, d'identifier les propriétés communes aux éléments de la classe (aspect qualitatif), et, d'autre part, d'appliquer la relation de partie à tout à ces éléments (aspect quantitatif). L'enfant doit coordonner la relation de ressemblance et la relation de partie à tout pour élaborer la relation d'inclusion. Lorsque celle-ci devient une représentation interne, elle sert de modèle auquel de nouvelles expériences seront confrontées.

La construction de la structure hiérarchisée des nombres s'avère une opération mentale complexe. Grâce à des épreuves d'inclusion de classes, Piaget a montré qu'une pensée mobile était nécessaire pour réaliser les traitements cognitifs utiles à cette opération. Par exemple, dans une de ces épreuves, on présente à l'enfant plusieurs perles en plastique de même taille, mais de couleur différente, et on lui demande de montrer toutes les perles en plastique, toutes les perles jaunes, puis toutes les perles vertes. Ensuite, l'expérimentateur lui demande s'il y a plus de perles jaunes ou plus de perles en plastique.

L'enfant qui n'a pas encore construit la relation d'inclusion divise le tout (toutes les perles en plastique) en deux parties (perles jaunes et perles vertes). Les parties prennent le pas sur le tout, et, l'enfant conclut alors qu'il y a plus de perles jaunes que de perles vertes. Lorsque l'enfant peut diviser le tout en deux parties et réunir ces parties en un tout, il sait qu'il y a plus de perles en plastique que de perles jaunes. Cette activité cognitive exige une pensée réversible, donc opératoire, parce qu'elle permet de réaliser des opérations pour lesquelles l'enfant doit considérer simultanément le tout et ses parties.

Certains auteurs ont critiqué les conditions expérimentales des épreuves d'inclusion. Markman a voulu vérifier l'effet des variables perceptuelle et linguistique dans des épreuves d'inclusion (1973) et des tâches de raisonnement sur les nombres (1979). Dans un premier temps, elle a réalisé une étude utilisant des épreuves d'inclusion auprès de 40 élèves de 1e

année du primaire. Les résultats ont montré que l'utilisation de termes focalisant l'attention sur les éléments d'une collection (exemple: la famille) induisait des performances supérieures à celles qui ont été obtenues lorsque les mots utilisés faisaient référence à une classe d'objets (exemple: les fleurs). De même, dans une seconde recherche, elle montre que les sujets âgés entre quatre et huit ans réussissent mieux les épreuves de conservation du nombre lorsque les éléments mis en cause correspondent à des éléments d'une collection (exemple: la forêt) qu'à ceux d'une classe (exemple: les arbres).

Les résultats de ces recherches conduisent à penser que l'établissement de la relation partie-tout semble facilitée par l'utilisation d'un lexique référant à une collection.

Houdé (1992) souligne la différence existant entre les collections de Markman et les classes piagésiennes. Il note, entre autres, que les collections de Markman

« pourraient être rapprochées des collections non-figurales (piagésiennes) étant donné l'homogénéité des éléments. »

(Houdé, 1992, p. 65)

Les observations de Piaget effectuées auprès de 2 159 sujets âgés de 2 à 8 ans soumis à des épreuves de classification lui ont permis d'identifier trois stades par lesquels passe la formation de classes. Le premier montre, entre autres, que les enfants de 2 à 4 ans à qui on demande de classer des formes géométriques et des petits objets usuels selon la consigne: « mettre ensemble ce qui est pareil », réalisent des *collections figurales* les disposant selon des relations d'usage (exemple: des carrés forment un grand carré pour « faire une maison ») ou de convenance (exemple: un berceau avec le bébé). Au deuxième stade observé chez les enfants âgés de 5 à 7 ans soumis à la même tâche, les sujets construisent des collections *non-figurales* en juxtaposant, dans un premier temps, des éléments selon des critères de ressemblance ou de différence de « proche à proche sans plan d'ensemble » (Dolle, 1991). Dans un deuxième temps, les enfants subdivisent ces juxtapositions en sous-collections qui

tiennent compte d'un critère unique de classification en procédant par divers tâtonnements et corrections. On ne peut, selon Piaget, parler de « classes » puisque les sujets de cet âge procèdent par une méthode descendante (former d'abord des grandes collections pour arriver à en former des petites) ou ascendante (former d'abord des petites collections pour arriver ensuite à former des grandes) pour réaliser des collections. L'inclusion des classes exige, selon lui, une combinaison des procédés descendant et ascendant puisqu'elle implique une classification hiérarchique. Cette conduite caractérise le troisième stade de développement de la classification observé par Piaget chez les enfants de 5 à 7 ans.

Les études de Markman ne mettent pas en péril la validité des travaux de Piaget sur la logique des classes. L'auteure suggère d'ailleurs l'existence de deux catégorisations: l'une, correspondant à la logique des classes retenue par Piaget et dont la nécessité apparaît vers dix/onze ans et, l'autre, correspondant à une classification des objets sous forme de collections, classification utilisée, par exemple, par les enfants de sept ans.

Bideaud et Houdé (1991) soulignent que les travaux piagétiens font peu état des contraintes relatives au fonctionnement cognitif. Les récentes recherches en sciences cognitives ont mis en évidence la capacité limitée de la mémoire de travail et le « coût cognitif » de certaines activités de traitement de l'information. Ainsi, on peut supposer que les épreuves de logique des classes proposées par Piaget exigent une plus grande capacité de traitement chez le jeune enfant que les épreuves concernant les collections soumises par Markman. Nous vivons, écrivent Bideaud, Houdé et Pedinielli (1993) au sein de *collection figurales*.

« Dans nos appartements, toutes les chaises ou toutes les tables ne sont pas rangées ensemble dans une même pièce: chaque pièce rassemble une collection de meubles. » (p. 377)

À la différence de ces collections, souvent construites à partir de critères fonctionnels, les classes piagésiennes sont, quant à elles, construites logiquement à partir des différences ou des ressemblances de leurs attributs, et indépendantes d'un contexte. Leur construction suppose que, d'une part, l'enfant fasse parfois abstraction de la réalité perceptive et, d'autre part, qu'il établisse des hiérarchies à partir des objets de son environnement. Cette opération nécessite une grande mobilité cognitive puisqu'elle fait appel à la combinaison des procédés ascendants et descendants, c'est-à-dire que l'enfant doit considérer simultanément le tout et la partie.

Les études citées précédemment montrent que la construction de la logique des classes et des structures mathématiques s'appuient sur des opérations de pensée. Celles-ci sont nécessaires au traitement de situations favorisant la maîtrise d'un certain nombre de concepts et de procédures.

2. La résolution de problèmes additifs élémentaires

L'élaboration du concept de nombre par l'enfant se construit au fur et à mesure qu'il établit des relations de plus en plus complexes dans les situations numériques. Il « résulte en fin de compte de l'ensemble des situations pratiques et des problèmes théoriques qui lui donnent du sens... » (Vergnaud, 1991). Plusieurs recherches ont permis de mettre en évidence l'importance des différentes structures de problèmes additifs sur la résolution. Ce sont des problèmes dont la solution demande soit une addition, soit une soustraction.

On s'entend généralement pour dire que la résolution de problèmes additifs nécessite la construction d'une représentation de la situation. Celle-ci implique la mise en relation des données numériques du problème avec une structure de type partie-tout (Kintsch, 1988; Resnick, 1989, cités par Fayol in Bideaud, 1991). Fayol a identifié trois niveaux d'élaboration

de représentation dans la résolution de problèmes additifs. Le premier niveau correspond à un traitement séquentiel de l'énoncé: il n'y a pas encore de "représentation globale intégrée". Le second niveau permet, dans certains cas, la construction d'une représentation, tandis qu'au troisième niveau qui peut s'étendre de 4 à 11-12 ans, les données du problème, présentées de façon séquentielle,

"deviennent susceptibles de faire l'objet d'une représentation (ou encodage) en terme de relation d'inclusion (cf Briars et Larkin, 1984)".

(Fayol, 1990, p.195)

A. Les classifications de problèmes additifs

L'élaboration d'une classification de problèmes additifs établie selon les relations sémantiques produites dans l'énoncé nous permet de mieux comprendre les difficultés éprouvées par les élèves pour résoudre des problèmes additifs simples. On croyait, par exemple, que les problèmes faisant appel à une soustraction présentait un niveau de difficulté supérieur à ceux faisant appel à une addition ou que deux problèmes nécessitant la même opération étaient au même niveau de difficulté.

L'ensemble de travaux de Bilsky et Judd (1986) tendent à infirmer cette affirmation. En effet, les auteurs ont montré que des énoncés de problèmes quasi identiques mais décrivant une situation "statique" plutôt que "dynamique", présentent un niveau de difficulté supérieur. À titre d'exemple, voici deux problèmes proposés dans la recherche de Bilsky et Judd. Le problème 1 expose une situation "statique" tandis que le problème 2 décrit une situation "dynamique":

1) Jean doit préparer des hamburgers. Il a 4 hamburgers sur le grill et 6 hamburgers dans le réfrigérateur. Combien de hamburgers a-t-il?

2) Jean doit préparer des hamburgers. Il a 4 hamburgers sur le grill, il sort 6 hamburgers du réfrigérateur et les pose sur le grill. Combien de hamburgers a-t-il?

(Bilsky et Judd, 1986, in Fayol, 1990, p.150)

De nombreuses recherches en résolution de problèmes additifs ont porté sur la classification de problèmes et nous permettent d'identifier deux approches théoriques différentes. Ainsi, pour les auteurs américains, les stratégies de résolution du solutionneur sont tributaires de la structure du problème, tandis que, pour les européens, les stratégies de résolution sont sous le contrôle de la mise en relation des données par lesquelles le solutionneur structure le problème et se le représente (Brun, 1990).

La catégorisation de Riley, Greeno et Heller, (1983) prend en compte les relations sémantiques établies dans l'énoncé du problème (comparaison, combinaison, accroissement et diminution d'éléments), les opérations mathématiques mises en cause et l'identité de l'inconnue. De la combinaison de ces éléments résulte la constitution de quatre grandes catégories de problèmes comprenant chacune des sous-catégories. Cette catégorisation s'appuie sur l'énoncé du problème, mais ne permet pas de couvrir l'ensemble des types de problèmes possibles.

Selon Vergnaud, l'activité cognitive mise en oeuvre lors de la résolution d'un problème additif est un "calcul relationnel" par lequel le solutionneur structure et se représente le problème. C'est dire qu'en amont des procédés mis en place pour résoudre le problème, le sujet effectue une mise en relation des données du problème à partir de laquelle il construit une représentation.

Les travaux de Vergnaud (1981) sur la catégorisation de problèmes ne considèrent ni l'opération mathématique ni les actions relatives à la comparaison, la combinaison, etc, mais

s'appuient plutôt sur le calcul relationnel qui fait référence aux opérations de pensée nécessaires à la mise en relation des données. La distinction que fait le solutionneur entre « état » et « transformation » (Brun, 1990) lui permet de faire des opérations.

Pour Vergnaud, le nombre « état » correspond à la *mesure* tandis que le nombre « transformation » correspond au *nombre-opérateur* mis en cause. Ainsi, dans le problème: *Marie a 4 billes, elle perd 2 billes*, 4 billes mesure l'état de la collection de Marie, et 2 billes correspond à une transformation négative de cet état. Ce problème peut être symbolisé par l'équation suivante: $(+4) + (-2) = 2$ qui rend compte de l'addition d'un nombre naturel (+4) avec un nombre relatif (-2).

La prise en compte du calcul relationnel conduit Vergnaud à déterminer six grandes catégories de problèmes additifs. Il établit, pour cela, une hiérarchie fondée sur la complexité entre les différentes catégories de problèmes pour laquelle il utilise trois données soit: *le signe positif ou négatif* de la transformation, *l'élément sur lequel porte la question*, comme par exemple: l'état initial, l'état final ou la transformation et *le degré de complexité* de la mise en relation des données du problème (Brun, 1990). Il parvient ainsi à distinguer:

- 1) des problèmes de composition de mesures: *Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Il a en tout 14 billes;*
- 2) des problèmes de transformation de mesures: *Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Il en a maintenant 11;*
- 3) des problèmes de relation entre mesures (ou comparaison): *Paul a 8 billes. Jacques en a 5 de moins. Il en a donc 3;*
- 4) des problèmes de composition de transformations: *Paul a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd'hui. En tout il en a perdu 3;*
- 5) des problèmes de transformation d'un état relatif: *Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2;*

6) des problèmes de composition de deux états relatifs: *Paul doit 6 billes à Henri mais Henri lui en doit 4. Paul doit donc 2 billes à Henri* (Vergnaud, 1981, p. 135-136-137).

Quel que soit le modèle de classification (américain ou européen) ou le type de problème additif, l'état des recherches actuelles nous permet de dire que « la résolution nécessite toujours une mise en correspondance des données numériques avec une structure du type partie-partie-tout » (Kintsch, 1988; Resnick, 1989). Une fois cette correspondance établie, le solutionneur peut aisément résoudre le problème. Pourtant, on observe des difficultés prolongées pour certains types de problèmes comme les problèmes de transformation d'un état relatif et les problèmes de composition de deux états relatifs (Vergnaud, 1981). Il semble donc que la mise en relation des données du problème, nécessaire à la construction d'une représentation, soit plus ou moins facile à établir par le solutionneur.

Kamii (1990) a voulu vérifier s'il y avait corrélation entre les erreurs effectuées dans la résolution de certains types de problèmes et la difficulté pour le solutionneur à établir la mise en relation entre la partie et le tout. L'auteure appuie les fondements de sa recherche sur les postulats suivants: l'action de "partager" ne nécessite pas la "séparation (mentale) d'une partie d'un tout", il s'agit plutôt pour le solutionneur de considérer le tout et chaque partie séparément. Par contre, l'action de "comparer" implique, quant à elle, la prise en compte de deux tous, dont l'un doit être:

« mentalement « déplacé » dans l'autre et considéré comme une partie du tout plus grand... La logique de cette relation entre tout et partie semble très difficile avant l'âge de sept ou huit ans parce que la différence entre les deux ensembles ne peut être connue sans réfléchir simultanément aux parties et au tout. »

(Kamii, 1990, p.157)

Kamii a donc proposé à des élèves de la 1^e à la 5^e année du primaire, trois énoncés verbaux de problèmes additifs correspondant à ce qu'elle qualifie de problèmes de partage (transformation), de comparaison (relation) et de compensation (composition). Elle a contrôlé les difficultés inhérentes au calcul numérique en limitant les données numériques à de tout petits nombres. Le but de la recherche consistait à vérifier la mise en relation des données selon la relation partie-tout plutôt que de mesurer l'adéquation du calcul numérique. Nous nous attarderons plus précisément aux conclusions impliquant les termes lexicaux et la mise en relation des données du problème chez les sujets de 3^e année, puisque des élèves de ce niveau scolaire font l'objet de la présente recherche. Il s'avère donc que le problème de «partage» (transformation) est réussi par 100% des sujets de 3^e année tandis que le problème de «compensation» (composition) est réussi par 95%. Par ailleurs, le problème de «comparaison» (relation) est réussi par 80% de ces élèves. Les résultats de cette recherche nous permettent de plus d'observer un écart significatif entre les performances des élèves de 3^e année et ceux de 2^e année. En effet, seulement 53% des sujets de 2^e année réussissent le problème de comparaison et 57% d'entre eux réussissent le problème de compensation.

On constate que la mise en relation des données entre la partie et le tout semble plus difficile avant l'âge de sept ou huit ans, ce qui peut s'expliquer par la plus grande complexité que cette activité cognitive implique puisque le solutionneur doit identifier et mettre en relation une donnée du problème correspondant à une partie, et une donnée correspondant à un tout. Par exemple, pour résoudre le problème: *Marie a 5 ans et Jean a 3 ans de plus. Quel est l'âge de Jean?* le sujet doit considérer l'âge de Marie comme étant une partie de l'âge de Jean.

Étant donné que la catégorisation de Vergnaud est purement conceptuelle, c'est-à-dire qu'elle est fondée sur les opérations nécessaires à la mise en relation des données d'un problème, elle convient selon nous à l'examen des représentations de problèmes que les

enfants construisent, c'est pourquoi nous retenons cette catégorisation pour les fins de cette recherche.

B. Les problèmes de transformation

Les caractéristiques formelle et sémantique de l'énoncé sont des variables importantes pour la mise en relation des données du problème sur laquelle s'appuie le calcul relationnel. Fayol et Abdi (1986) ont étudié l'impact de la formulation de l'énoncé sur la résolution de problèmes additifs. Ils ont proposé oralement des problèmes à des sujets de 1e, 3e et 5e année du primaire (CP, CE2 et CM2) en contrôlant le niveau de difficulté numérique. Voici un exemple de problèmes utilisés pour les fins de leur recherche:

(problème) $S_1O_1Q_1$: *Paul avait ... bonbons. Sa maman lui a donné ... bonbons. Sa soeur lui a donné ... bonbons. Combien Paul a-t-il maintenant de bonbons?*

(Fayol, 1986, p. 55)

où S_1 correspond à la variable: recherche de l'inconnue (état final); O_1 correspond à l'ordre de présentation des informations (en premier); et Q_1 représente l'emplacement de la question (en fin d'énoncé).

Des résultats obtenus dans cette étude, il ressort que l'emplacement de la question au début du problème améliore les performances à tout âge et ce, pour tous les types de problèmes. L'amélioration est surtout perceptible dans les problèmes plus difficiles comme ceux portant sur la recherche de l'état initial. L'emplacement des *transformations* avant la mention de l'état (ou mesures) induit de meilleures performances. Les performances demeurent invariables selon le groupe d'âge des sujets; les effets observés demeurent donc quel que soit le niveau de développement. Par ailleurs, l'effet observé de la formulation de l'énoncé sur la résolution de problèmes additifs confirme l'importance du calcul relationnel.

En effet, les résultats rapportés par Fayol et al., montrent que les choix de procédures de résolution des élèves diffèrent selon les modalités de formulation. Par ailleurs, les résultats de leurs travaux révèlent que les problèmes qui correspondent à la recherche de l'état final et de l'état initial sont facilement résolus par tous les élèves des trois niveaux scolaires.

Dans le but de vérifier l'effet des facteurs mathématiques et linguistiques dans la résolution de problèmes additifs verbaux, Rosenthal et Resnick (1974) ont présenté à des élèves de 3e année du primaire des énoncés de problèmes comportant des verbes qui correspondent soit à un « gain » soit à une « perte », comme par exemple: acheter/vendre; trouver/perdre; prendre/donner; envoyer/recevoir¹. Les auteurs ont contrôlé l'effet possible de difficultés relatives aux données numériques en proposant des nombres de deux à sept. Les résultats de cette expérience montrent, entre autres, des différences de performances dans la résolution des problèmes présentant soit un gain, soit une perte. En effet, il semble que pour les problèmes qui portent sur la recherche d'un état final, les problèmes dont le verbe indique un calcul relationnel correspondant à une perte sont plus difficiles que ceux correspondant à un gain. À titre indicatif, nous pouvons illustrer ainsi les types de problèmes additifs proposés par les auteurs:

*« If Paul started out with 5 boats and he **bought** 3 boats, how many boats did he end up with? »*

*« How many cars did John end up with if he **sold** 2 cars and he started out with 7 cars? »*

(Rosenthal et Resnick, 1974, p.820)

Le premier problème correspond à un problème additif de type: $a + b = c$ (verbe de l'énoncé correspondant à un gain), tandis que le second problème est de type: $a - b = c$ (verbe de

¹ Pour Fischer, un opérateur sémantique est "une unité sémantique réunissant un concept et une expression verbale et marquant soit une accumulation (e.g., gagner, perdre, acheter, vendre, ...), soit une comparaison (e.g., de plus, de moins, fois plus, fois moins, ...)." p. 181

l'énoncé correspondant à une perte). Notons toutefois, que les informations du second problème ne sont pas présentées dans un ordre chronologique, ce qui peut affecter le traitement des données et la construction de la représentation.

Une recherche menée par Escarabajal et ses collaborateurs (1983,1984) sur « la construction d'un modèle de simulation des processus de compréhension et de résolution de problèmes additifs » révèle des difficultés relatives aux problèmes de transformation. L'auteure appuie le cadre théorique de sa recherche sur la notion de « schéma » empruntée à la psychologie cognitive. Dans cette perspective, l'activation d'un schéma lors de la lecture d'un problème permet la représentation d'une situation à partir de laquelle des valeurs contextuelles sont attribuées aux variables que le schéma comporte, et qui sert de guide aux procédures de résolution. Pour Escarabajal, cette représentation

«se compose de l'ensemble des informations prises en compte dans l'énoncé, des connaissances actualisées et des informations inférées, elle est le résultat d'une construction déterminée par l'analyse que le sujet fait de la situation».

(Escarabajal, 1984, p. 248)

Ainsi, le problème additif suivant a été soumis à des élèves de 2e et de 3e année:

«Avant la récréation, Jean avait 37 billes. Pendant la récréation il a gagné 22 billes. Combien de billes a-t-il après la récréation?»

La résolution du problème de type $a + b = c$, nécessite l'activation d'un schéma de type: état - changement - état, et elle est réussie par 98% des élèves de 3e année. Par contre, seulement 72% des sujets réussissent si on leur fournit l'état final et qu'ils doivent alors trouver la transformation: $a + ? = c$.

À partir de ces résultats, l'auteure (1984, 1988) soutient que pour résoudre un problème, le sujet doit activer le schéma de résolution approprié et attribuer des valeurs aux variables, cette opération cognitive permettant la compréhension de l'énoncé du problème. Lorsque le solutionneur ne dispose pas du schéma de résolution approprié, il active un autre schéma disponible qui peut le conduire à une résolution erronée. La chercheuse nuance toutefois son propos en soulignant que «la description des connaissances en termes de schémas ne vaut pas pour tous les enfants»; elle est pertinente dans la mesure où l'enfant a atteint un certain niveau d'expertise et a effectivement construit un certain nombre de schémas. Dans les autres cas, il faudrait envisager

« une description plus dynamique d'un processus qui ressemble plutôt à une construction de la signification de la situation qu'à une reconnaissance d'un schéma de problème ».

(Escarabajal, 1988, p.20)

L'approche proposée par l'auteure comporte donc des limites pour interpréter les conduites du solutionneur.

L'étude des protocoles de résolution de problèmes réalisée par Conne (1985) fait apparaître une dimension importante quant aux opérations cognitives effectuées lors de la mise en relation des données nécessaires à la résolution du problème. S'appuyant sur une recherche antérieure effectuée par Durand et Vergnaud (1976), qui révèle les taux de réussite de résolution de 12 problèmes additifs par des élèves répartis dans les deux cycles du primaire, l'auteur veut examiner à partir des réponses données par le sujet, les opérations de pensée qui ont pu être effectuées lors de la mise en relation des données du problème. Il est important de souligner certaines considérations mathématiques qui servent de fondements à son étude et qui sont pertinentes à la présente recherche. Il s'agit, entre autres, des suivantes:

- 1) « ... les nombres (N) sont des entités ordonnées, et c'est cet ordre qui définit les opérations d'addition et de soustraction; »
- 2) On considère alors sur Z un ordre qui « prolonge » celui de N ;
- 3) ... dans (N), le calcul de l'addition et de la soustraction se fait sur l'ordre des nombres; »
- 4) ... dans (Z), il faut distinguer calcul numérique et calcul sur les signes (ou algébrique). Le calcul algébrique permet en outre de ramener tout calcul de Z à une opération numérique de N ;
- 5) ... la soustraction renvoie à une situation de tout à partie ».

(Conne, 1985, p.282-283)

L'analyse des protocoles des sujets de la recherche âgés entre huit et dix ans révèle que, pour les problèmes de la catégorie état - transformation - état (ETE), les élèves disposent «des représentations qui leur permettent de concevoir et d'opérer une transformation sur un état, additivement et soustractivement». Par contre, pour les problèmes de type transformation - transformation - transformation composée (TTT), certaines réponses sont formulées en «termes d'état et témoignent de la mobilisation d'un même schéma (ETE) de représentations» (Conne, 1985) ce qui rejoint les conclusions auxquelles parvient Escarabajal (1988).

L'interprétation des procédures de résolution conduit Conne à faire l'hypothèse que c'est dans le cadre d'un registre (celui du gain ou de la perte) que l'opération à effectuer doit être déterminée. Chez les jeunes sujets, se placer dans un registre équivalent, pour le solutionneur, à ramener les calculs numériques et relationnels dans le cadre de N , c'est-à-dire de traiter des entiers relatifs comme des entiers naturels. Le registre utilisé est caractérisé par trois connotations: l'ordre chronologique des événements dans l'énoncé, la relation entre composante et composée (partie-tout), et l'indice d'intensité des données numériques (ou *amplitude* des données numériques). Le registre permet ainsi au jeune solutionneur de

s'adapter aux difficultés que présente le calcul relationnel et de trouver la réponse numérique correcte au problème. Dans certains cas, un tel traitement peut conduire l'élève à un « glissement de sens », c'est-à-dire à une transformation du problème ou à une modification de la représentation du problème en cours de résolution (Brun, 1990).

Vergnaud (1981) a identifié les obstacles nés de la mise en relation des données de certains types de problèmes additifs. Il s'avère que le solutionneur n'éprouve pas de difficulté lorsque l'opérateur (par exemple: +) utilisé pour résoudre le problème est compatible avec la conception primitive de l'addition en tant que « gain », c'est-à-dire comme l'augmentation d'une quantité. Les difficultés du solutionneur s'accroissent lorsqu'il doit appliquer une addition à un problème de « perte » comme par exemple: *Marie vient de jouer aux billes. Elle a perdu 5 billes et il lui en reste maintenant 3. Combien en avait-elle avant de jouer?* La perte évoquée par l'énoncé appellerait la conception primitive de la soustraction tandis qu'il faut plutôt recourir à l'opérateur mathématique +. En effet, le solutionneur doit partir de l'état final (3 billes) et y appliquer la transformation *inverse* de celle qui est suggérée par la lecture de l'énoncé, c'est-à-dire $3 + 5 = 8$ billes, 8 billes correspondant à l'état initial.

C. Les problèmes de comparaison

Peu de recherches se sont intéressées à l'impact des termes relationnels présentant les formes: « de plus » ou « de moins » dans les énoncés de problèmes. Pourtant, certaines études montrent des difficultés inhérentes à la mise en relation des données d'un tel type de problème.

Fayol (1990) rapporte les résultats obtenus dans une étude de Riley, Greeno et Heller (1983) par des élèves de maternelle, CP, CE1 et CE2 (1^e, 2^e et 3^e année) soumis à des problèmes, qui, dans la catégorisation de Vergnaud correspondent à des problèmes de

composition, de comparaison (que lui, nomme problème de relation) et de transformation. Il semble que les sujets éprouvent plus de difficultés à résoudre les problèmes de comparaison que les problèmes de composition et de transformation. Selon Fayol, « la compréhension de la situation décrite par l'énoncé constitue l'obstacle essentiel » à la construction de la représentation et à la résolution du problème. Par ailleurs, les résultats de la recherche ne montrent pas de différence significative entre les taux de réussite de résolution aux problèmes, que la comparaison soit exprimée par l'expression relationnelle « de plus » ou « de moins ».

Fayol (1991) fait aussi état de quelques recherches récentes portant sur le rôle de certaines expressions relationnelles (ou opérateurs sémantiques) contenues dans les énoncés de problème. Déjà, l'étude de Donaldson (1978) par exemple, révélait les difficultés d'interprétation reliées aux expressions «plus de (que)», «moins de (que)» dans la résolution de problème. La recherche de Dellarosa-Cummins et de ses collaborateurs (1988) auprès d'élèves du premier cycle du primaire rapporte également que des termes relationnels peuvent être interprétés comme des termes non-relationnels par le jeune solutionneur. Ainsi, dans un premier temps, 38 élèves de 1e année ont résolu 18 problèmes additifs de type combinaison (composition), changement (transformation) et comparaison adaptés de la classification de Riley, Greeno et Heller (1983). La moitié de ces sujets ont, d'abord, résolu les problèmes et, par la suite, effectué le rappel des énoncés. L'autre moitié des élèves a procédé à l'inverse. Dans un deuxième temps, 36 élèves de 2e année et 36 élèves de 3e année ont dû, quant à eux, faire le rappel de l'énoncé de problème, le compléter d'une question appropriée à sa structure et résoudre le problème. Ces sujets ont été soumis à quatre problèmes additifs de même type que ceux déjà mentionnés. Pour deux de ces problèmes, les tâches étaient proposées dans l'ordre suivant: les sujets devaient résoudre deux problèmes demandant d'abord le rappel de l'énoncé, l'ajout de la question et la résolution, et, pour les deux autres, on demandait

d'abord la complétion de l'énoncé par une question, puis, la résolution du problème et enfin le rappel de l'énoncé.

Les résultats de la recherche montrent, entre autres, l'étroite relation observée entre les performances de rappel et celles de la résolution du problème. Les auteurs font l'hypothèse que le rappel effectué par l'enfant correspond à la représentation qu'il se fait du problème, à partir de laquelle se fait la résolution du problème. Ils ont observé qu'un problème de comparaison présentant l'expression relationnelle « have-more-than » est interprétée comme « have ». Par exemple, l'énoncé: « *Mary has 3 marbles. John has 4 marbles more than Mary. How many marbles does John have?* » conduit, dans certains cas, à un rappel du type: « *Mary has X marbles. John has Y marbles. How many marbles does John have?* » (Dellarosa-Cummins, 1988). Dans la discussion des résultats, les auteurs rapportent que la connaissance des termes relationnels semble faciliter l'accès à la connaissance conceptuelle partie-tout. Ceci permet au solutionneur de se construire une représentation du problème dans laquelle l'instanciation des données du problème est clairement établie en terme de partie-tout.

L'étude de De Corte & Verschaffel (1987) rapportée par Fayol (1990) montre également des difficultés relatives aux expressions relationnelles « de plus », « de moins ». Un jeune solutionneur qui doit résoudre le problème: *Pierre a 3 pommes. Anne lui donne 5 pommes de plus* dira qu'Anne ne peut donner 5 pommes, car, pour lui, elle n'a pas de pomme.

Quoique nous ayons des données sommaires concernant les difficultés relatives aux problèmes de comparaison, nous pouvons dire que la mise en relation des données dans ce type de problème semble s'avérer plus difficile que celle d'autres types de problème.

De ce que nous venons de rapporter, nous voyons qu'il apparaît que les problèmes de transformation et de comparaison présentent un intérêt particulier puisqu'ils nous permettent d'examiner les relations effectuées par le solutionneur pour traiter, d'une part, les rapports état/transformation et, d'autre part, les expressions telles: « de plus » et « de moins » qui marquent une relation entre les données de l'énoncé. Nous retenons par conséquent, pour les fins de cette recherche, les problèmes de transformation d'un état relatif et de comparaison entre états relatifs.

LA STRUCTURE DE CONNAISSANCES

La résolution d'un problème arithmétique est une activité cognitive qui nécessite que le solutionneur mette en oeuvre ses propres connaissances afin de construire une représentation du problème induisant des procédés de résolution. Les connaissances sont des « structures stabilisées en mémoire à long terme » (Richard, 1990) qui constituent la base sur laquelle nous élaborons des nouveaux faits. Ainsi, pour comprendre un énoncé de problème, le sujet doit utiliser les connaissances stockées dans sa réserve de connaissances (ou mémoire) et les mettre en relation avec la nouvelle situation.

Les chercheurs s'accordent pour identifier trois types de connaissances: les connaissances déclaratives, procédurales et métacognitives. Ces dernières concernent «les connaissances qu'a un sujet sur ses propres connaissances et du contrôle qu'il exerce sur son propre système cognitif» (Richard, 1990). Les connaissances procédurales concernent les savoir-faire sollicités lors de l'exécution d'une tâche comme la résolution de problèmes mathématiques. Les connaissances déclaratives, dont celles qui portent sur les catégories naturelles, concernent les savoirs verbalisables sur le monde qui peuvent être sollicités lors de la lecture de l'énoncé.

La résolution de problèmes mathématiques fait appel, entre autres, à des opérations sémantiques pour permettre au solutionneur de construire une représentation adéquate du problème à résoudre. Ainsi, souligne Blanchet (1992), en plus des connaissances ayant trait aux mathématiques « s'ajoutent des représentations particulières propres aux contenus de cette situation » qui permettent au solutionneur d'établir des relations entre les éléments de l'énoncé à partir des connaissances sur le monde qu'il a pu déjà construire. De plus, il semble que la construction d'une représentation du problème additif en termes de partie-tout ou de relation d'inclusion favorise la résolution.

Dans un premier temps, nous précisons le rôle de la structure sémantique de l'énoncé de problème sur la construction de la représentation du problème. Dans un deuxième temps, nous présenterons les recherches concernant les catégories naturelles, de façon à rendre compte de l'organisation hiérarchique des concepts unis entre eux par une relation d'inclusion.

1. La compréhension de l'énoncé

La compréhension de l'énoncé d'un problème fait appel aux connaissances antérieures de l'élève qui doit résoudre le problème; plus précisément, elle sollicite des connaissances linguistiques et des connaissances sur le monde. De façon générale, la sémantique réfère aux relations qui unissent les mots et les objets du monde que ces mots désignent. Les linguistes font une différence entre *la structure de surface* d'un objet de langage tel qu'un texte - ou un énoncé de problème - qui correspond à l'organisation syntaxique des phrases écrites ou parlées, et la *structure profonde* ou structure sémantique qui réfère au sens que ces phrases permettent de construire.

Pour communiquer, nous devons faire appel aux structures sémantiques et linguistiques de notre mémoire afin de produire un message qui soit compréhensible, parce que porteur du sens voulu et grammaticalement correct. Par contre, mis en situation de comprendre un message énoncé, nous devons d'abord en reconnaître les structures syntaxiques pour être en mesure de construire la structure sémantique du texte lu ou entendu. Cependant, certaines phrases peuvent être apparemment semblables et différer au niveau sémantique. Dans l'exemple que nous proposent Lindsay et Norman (1980): «*Patrick mijote./Le souper mijote.*», ces phrases sensiblement identiques si l'on considère la structure de surface présentent pourtant des significations fort différentes, étant donné la nature différente - humain/non-humain, des arguments dans chacune des propositions sémantiques

que contiennent ces phrases. Par ailleurs, le sens accordé aux propositions sémantiques qui composent la signification d'un texte peut différer d'une personne à l'autre, en particulier de l'émetteur au récepteur, puisqu'il est tributaire de la mémoire sémantique de chacun, et dépend des structures sémantiques préalablement construites qu'elle contient.

La compréhension de l'énoncé d'un problème passe par le traitement des informations dont il est constitué. Grâce à ce traitement, le solutionneur d'un problème va construire une représentation adéquate de la situation proposée dans l'énoncé. Pour ce faire, il doit « sélectionner des unités de signification c'est-à-dire découper l'énoncé en éléments pertinents... et établir des relations entre ces éléments » (Escarabajal, 1988). Ainsi, dans un premier temps, il doit identifier l'**action** évoquée dans l'énoncé (exemple: *gagner* quelque chose). Dans un deuxième temps, il doit distinguer l'**agent** qui est à l'origine de l'action (exemple: *Pierre* gagne quelque chose) et enfin, l'**objet** sur lequel porte l'action (exemple: Pierre gagne x *billes*). De plus, dans certains cas, l'effet d'une action peut affecter une autre personne, on parle alors de **récepteur** ou de patient (exemple: Pierre donne x billes à *Jean*) (Lindsay et Norman, 1980). Cette façon de structurer l'information permet une économie de l'activité cognitive. En effet, pour comprendre l'énoncé: *Marie gagne x autocollants à un tirage à l'école*, les connaissances activées pour comprendre *Pierre gagne* peuvent être reprises et des variables contextuelles y sont ajoutées, soit ici, des variables ayant trait au moyen: « à un tirage » et au lieu: « à l'école ».

Pour réaliser le traitement cognitif de l'énoncé, le solutionneur dispose de deux formes de structures sémantiques: les schémas et les réseaux relationnels. Les schémas sont des blocs de connaissances qui permettent de se représenter la réalité et d'agir sur elle. Ils sont composés de variables et de relations. Ainsi, pour comprendre un énoncé de problème, le solutionneur doit activer un schéma disponible en mémoire et instancier les variables du problème dans le schéma activé.

Les réseaux relationnels, témoignent de l'organisation des concepts qui permettent de rendre compte des objets du monde (Richard, 1990). L'organisation conceptuelle nous intéresse plus précisément à cause de la structure hiérarchique des éléments qui la constituent et qui sont reliés entre eux par une relation d'inclusion, relation justement sollicitée dans la résolution des problèmes auxquels s'intéresse la présente recherche.

2. La structure conceptuelle

La distinction entre concept et catégorie n'est pas clairement délimitée dans la littérature. Ils peuvent être utilisés indifféremment l'un pour l'autre. Cependant, dans les recherches sur la formation de concepts et de catégories, le concept se définit comme une représentation mentale générale d'un objet, tandis que la catégorie désigne l'ensemble de ces mêmes objets regroupant des sous-catégories ou exemplaires du concept. Ainsi, lorsque nous pensons au concept « fleur », nous faisons appel à une représentation mentale abstraite, générale du concept, et non pas à un exemple de « fleur » en particulier. Par ailleurs, cette représentation du concept nous permet de classer le concept « marguerite » dans la catégorie « fleur ».

Ainsi, si nous voulons savoir ce qu'est une « tulipe », nous devons nous référer à une

« sorte de base de données où l'information est organisée, et où le concept est possiblement défini par une liste de caractéristiques. »

(Fortin et Rousseau, 1992, p.356)

Les catégories dites « naturelles » nous permettent de classer les objets qui existent dans notre environnement. Elles sont caractérisées grâce à deux types de relations. D'abord, la relation « est un »... permet de décider de l'*appartenance* d'un objet ou exemplaire à une catégorie et, ce faisant, d'attribuer à cet objet les propriétés communes à tous les exemplaires de la catégorie. Puis, la relation « a... » permet de spécifier les *propriétés* ou caractéristiques de cet objet, qui le distinguent d'un autre. Ainsi, pour définir le concept de « corneille », un

sujet pourra dire qu'une corneille «a... un plumage noir» et qu'elle «est... un oiseau». La compréhension d'un nouveau concept par un enfant sera établie lorsque celui-ci sera en mesure d'identifier les propriétés relatives au concept, d'en reconnaître des exemples et d'établir des relations de classe. Par exemple, l'introduction du concept «chardonneret» pourra se faire à l'aide de l'énoncé suivant: *Un chardonneret est un oiseau au plumage coloré qui chante*. Le concept «chardonneret» sera relié à la classe «oiseau» à l'aide de la relation d'inclusion qui implique une «relation de subordination» (Le Ny, 1975). Ainsi, le chardonneret appartient à la catégorie «oiseau» qui est elle-même incluse dans la catégorie «animal». Par le jeu de l'inclusion des classes, le chardonneret fait aussi partie de la catégorie plus générale «animal». De plus, « au plumage coloré qui chante » est une propriété rattachée à l'exemplaire chardonneret permettant de le particulariser.

Cependant, deux théories s'opposent sur la façon dont les sujets construisent les catégories. Les tenants de la conception aristotélicienne ou classique, considèrent qu'une sous-catégorie ou exemplaire appartient à une catégorie si celui-ci possède les mêmes propriétés que le concept qui désigne la catégorie. Ainsi, c'est à partir de la définition classique d'une catégorie qu'un exemplaire pourra ou non être reconnu comme appartenant à cette catégorie. Cette approche suppose que chacun des concepts ait un statut équivalent dans l'organisation sémantique de la mémoire.

A. Le modèle classique

Cette conception a donné lieu, entre autres, au modèle d'organisation de la mémoire sémantique de Collins et Quillian (1969). La figure suivante présente le modèle proposé par ces auteurs. Il illustre l'organisation hiérarchique de la mémoire sémantique sur laquelle ce modèle est basé.

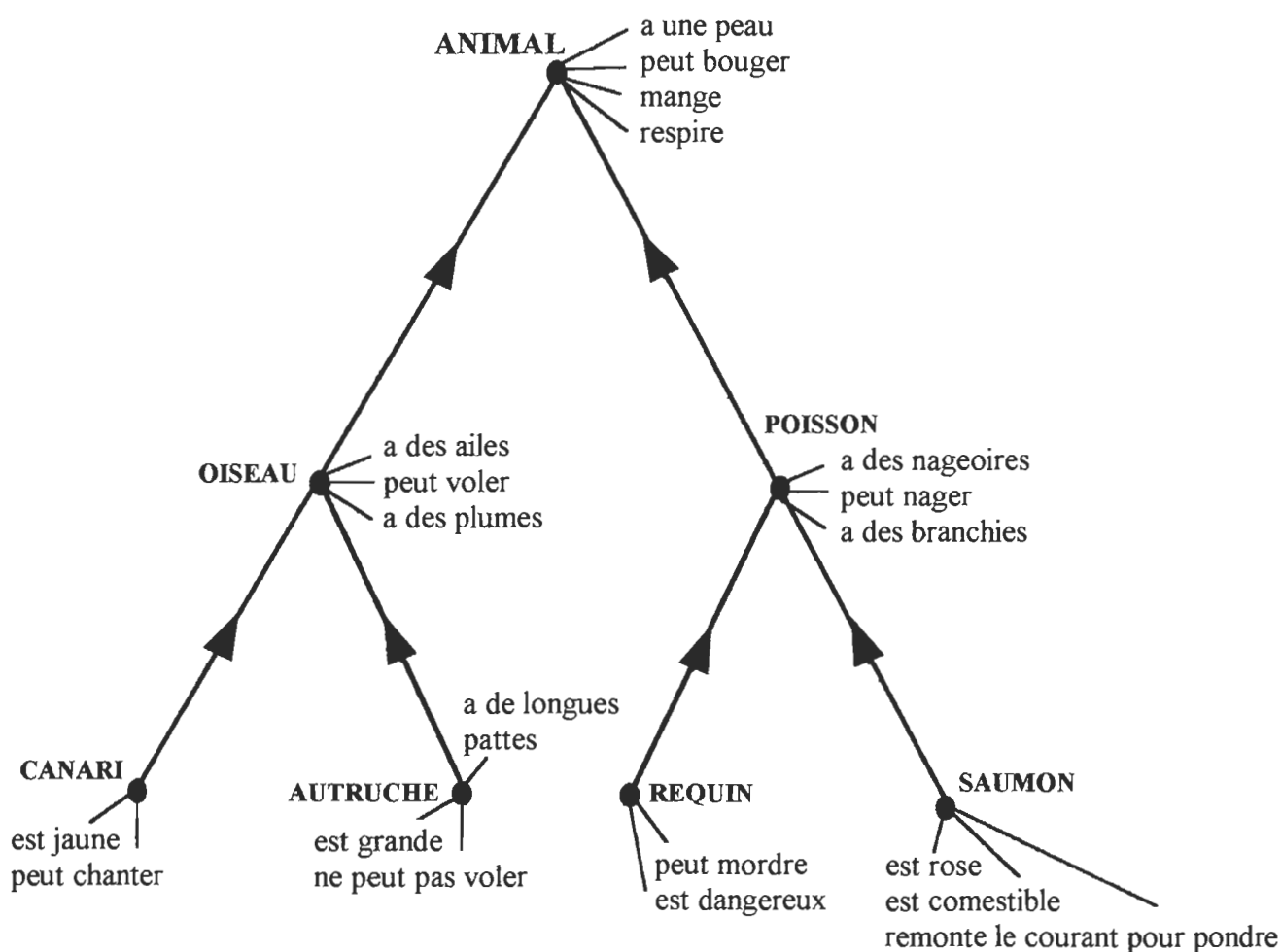


Figure 4: L'organisation de la mémoire sémantique d'après Collins et Quillian (1969)
(reprise par Dubois, 1986, p. 74)

Ce modèle est constitué d'un réseau de concepts (nœuds) et de liaisons (arcs) marquant des liens d'appartenance « est un » et d'inclusion figurée par les flèches entre les

concepts. Les propriétés spécifiques (arcs) du concept sont reliées au concept lui-même, tandis que les propriétés communes à plusieurs concepts sont reliées à un niveau supérieur (Richard, 1990). Ainsi, « est jaune » et « peut chanter » sont des propriétés stockées au noeud « canari », tandis que « a des ailes », « peut voler », « a des plumes » correspondent au noeud « oiseau » et enfin, « a une peau », « peut bouger », « mange », « respire » sont des propriétés relatives au noeud « animal ». Pour vérifier l'énoncé: « un canari est un animal », le sujet doit remonter dans la hiérarchie conceptuelle à partir du noeud « canari » jusqu'au concept « animal » tout en suivant la relation d'inclusion.

Plusieurs recherches ont mis en évidence l'incompatibilité du modèle proposé par Collins et Quillian avec les résultats obtenus lors de vérifications expérimentales auprès de sujets humains. Ainsi, les résultats des travaux de Rips, Shoben et Smith (1973) ont montré que:

« la mémoire sémantique ne reflète pas nécessairement une structure logiquement hiérarchisée selon les principes de la logique classique (aristotélicienne)... »

(Dubois, 1988, p. 82)

Les auteurs ont présenté aux sujets de la recherche une tâche de vérification de phrases. Ils ont observé, entre autres, des temps de réaction plus longs à des propositions telles: *une souris est un mammifère* (1 440 ms) qu'à *une souris est un animal* (1 288 ms). Selon le modèle en réseaux proposé par Collins et Quillian, le concept *mammifère* se situe pourtant à un niveau inférieur de la hiérarchie, et, de ce fait, aurait dû être atteint plus rapidement que le concept *animal*. Ils ont aussi noté que des concepts d'un même niveau comme *poulet* et *perroquet* provoquent des temps de réaction différents lorsqu'ils sont associés à la catégorie « oiseau »: 1 362 ms pour le premier et 1 284 ms pour le second, ce qui est incompatible avec la « distance égale de leur surordonné » (Dubois, 1988), qui les caractériserait selon le modèle.

Les différences entre les temps nécessaires à la vérification des énoncés proposés aux sujets montrent que tous les exemplaires d'une catégorie ne sont pas situés à des niveaux d'abstraction équivalents. Au contraire, il semble que certains exemplaires soient plus représentatifs (ou plus typiques) d'une catégorie et qu'ils soient par conséquent, plus rapidement catégorisés. Ainsi, selon les résultats rapportés précédemment, le perroquet serait plus typiquement « oiseau » que le poulet.

B. Le modèle de Rosch

Les notions de « niveau de base » et de « typicité » introduites par les travaux de Rosch (1973, 1975, 1976) permettent de rendre compte du degré de représentativité des concepts dans l'organisation catégorielle. La notion de niveau de base fait l'hypothèse d'un niveau où sont catégorisés les concepts les plus rapidement activés, auxquels sont associées le plus de caractéristiques communes pour définir un concept. Cette organisation conceptuelle favorise une économie cognitive pour distinguer les objets du monde. « Il existe une chaise moyenne qu'il est facile d'imaginer: quatre pattes, un dossier, une plate-forme », écrivent Fortin et Rousseau (1992), par contre si l'on se place au niveau subordonné, « il n'existe pas de « mobilier moyen ». La seconde notion décrit le phénomène selon lequel, justement, tous les exemplaires d'une catégorie ne sont pas également représentatifs de cette catégorie.

Nous présentons, d'une part, des recherches concernant l'identification d'un niveau de base et, d'autre part, celles qui mettent en évidence la notion de typicité afin de mieux comprendre le rôle de chacune de ces notions dans l'organisation catégorielle des concepts.

1. Le niveau de base

Rosch et ses collaborateurs (1976) ont mené un ensemble de recherches dont les résultats permettent de mieux comprendre le fonctionnement des catégories naturelles, construites comme des taxonomies où les représentations catégorielles sont reliées les unes aux autres par inclusion des classes. Ces résultats leur ont permis d'établir l'existence de "représentations-types" (Le Ny, 1975) autour desquelles d'autres représentations sont ordonnées.

Rosch a étudié l'organisation hiérarchique d'objets concrets relevant de catégories biologiques (arbres, oiseaux, poissons...) et de catégories non biologiques (instruments de musique, outils, meubles...). Les résultats montrent que dans l'utilisation courante de certains mots de la catégorie, un niveau s'avère plus important que les autres. C'est par rapport à ce « niveau de base » que nous établissons les niveaux supérieurs et subordonnés qui correspondent respectivement à des niveaux plus abstraits et moins abstraits.

Rosch a présenté à 200 sujets étudiants en psychologie neuf taxonomies de catégories naturelles (3 biologiques et 6 non-biologiques) présentant chacune trois niveaux d'abstraction différents: le niveau supérieur ou surordonné (exemple: instrument de musique), le niveau de base (exemple: guitare), le niveau subordonné (exemple: guitare électrique). Le tableau 1, de la page suivante, montre des exemples de taxonomies non-biologiques utilisées comme stimuli.

Tableau 1
Exemples de catégories supérieure, de base et subordonnée

Catégorie Supérieure	De base	Subordonnée	
Instrument de musique	Guitare Piano Tambour	Guitare électrique Piano à queue Timbale	Guitare classique Piano droit Batterie électronique
Fruit*	Pomme Pêche Raisin	Granny Smith Melba Concorde	Mackintosh À noyau non adhérent Vert sans pépin
Outil	Scie Tournevis	Scie à métaux Philipps	Scie circulaire Tournevis à tête plate
Vêtement	Pantalon Chemise	Velours côtelé À manches courtes	Jeans À manches longues
Mobilier	Table Lampe Chaise	Table de cuisine Sur pied De cuisine	Table de salon De bureau De jardin
Véhicule	Voiture	Voiture sport	Berline

* Rosch (1976) souligne que Fruit n'est pas considéré comme une taxonomie biologique selon les critères proposés par Berlin (1972)
(D'après Rosch, Mervis, Gray, Johnsen et Boyes-Braem, 1976 repris par Fortin et Rousseau, 1992, p. 345.)

La tâche des sujets consistait à dresser une liste d'attributs décrivant les objets proposés. Les expérimentateurs ont retenu les attributs écrits par au moins six sujets sur vingt. Le tableau 2, reproduit à la page suivante, illustre le nombre d'attributs communs qui ont été associés aux exemplaires des trois niveaux.

Tableau 2
Nombre d'attributs communs à différents niveaux hiérarchiques

Catégorie	Niveau supérieur	Niveau de base	Niveau subordonné
taxonomies non-biologiques			
Instrument de musique	1	6,0	8,5
Fruit	7	12,3	14,7
Outil	3	8,3	9,7
Vêtement	3	10,0	12,0
Mobilier	3	9,0	10,3
Vehicule	4	8,7	11,2
taxonomies biologiques			
Arbre	9	10,3	11,2
Poisson	6	8,7	9,3
Oiseau	11	14,7	15,3

(Traduit de Rosch, Mervis, Gray, Johnsen et Boyes-Braem, 1976, p. 391)

Le tableau montre qu'au niveau supérieur un seul attribut commun a été mentionné pour la catégorie « instrument de musique » comparativement à 6 et 8,5 pour les niveaux de base et subordonné. Il est, en effet, difficile de trouver « une autre caractéristique commune aux instruments de musique, que celle de produire des sons », écrivent Fortin et Rousseau (1992). Il n'y a pas non plus de différence significative entre le nombre d'attributs trouvés au niveau de base et au niveau subordonné. Il semble donc que le niveau de base soit le niveau où il est possible de trouver le plus d'attributs propres à un concept et par le fait même celui sur lequel repose nos définitions de concepts.

Il apparaît que les représentations catégorielles du niveau de base ont un « effet facilitateur sur un certain nombre de tâche, telle(s) celle(s) d'inclusion des classes... » (Richard, 1990). En effet, les travaux de Hemenway (1981), rapporte Richard, montrent que le nombre d'attributs augmente sensiblement lorsqu'on passe de la représentation catégorielle du niveau supérieur au niveau de base, alors qu'il diffère peu si l'on passe du niveau de base au niveau subordonné, ce que l'on observe aussi dans le tableau de la page précédente. Les attributs énoncés au niveau de base seraient de type « partie-tout », écrit l'auteur, permettant ainsi d'englober les attributs des niveaux inférieurs dans ceux des niveaux supérieurs. Remarquons que le peu de différence entre le nombre d'attributs relevés au niveau de base et ceux relevés au niveau subordonné signale que l'on possède suffisamment d'attributs correspondant aux objets du niveau de base pour distinguer les objets des niveaux inférieurs.

2. Typicité du concept

Rosch et Mervis (1975) ont, par la suite, fait l'hypothèse qu'il existe un objet de la catégorie perçu comme étant le plus représentatif de la catégorie: celui qui partage le plus grand nombre d'attributs communs avec les autres objets de la catégorie à laquelle il appartient. Pour vérifier cette hypothèse, les chercheuses ont, dans un premier temps, demandé à des sujets expérimentaux d'évaluer la représentativité d'un objet appartenant à une catégorie donnée en le plaçant sur une échelle de 1 à 7 (1 correspondant à l'objet identifié comme le plus représentatif de la catégorie et 7, comme le moins représentatif). L'ensemble des notes obtenues a permis d'établir une moyenne de classement de chacun des objets, qui correspond au degré de typicité de l'objet pour un groupe de sujets donné. Dans un deuxième temps, elles ont présenté à d'autres sujets les objets de chacune des catégories retenues précédemment et elles leur ont demandé de décliner en 1 minute 30 secondes les attributs qu'ils pouvaient associer à chacun des objets de ces différentes catégories. Une note a été attribuée à chaque attribut sur une échelle de 1 à 15, correspondant au nombre de stimuli

auxquels il a été associé. Nous reprenons un exemple de Fortin et Rousseau nous permettant de mieux comprendre la technique utilisée par Rosch et Mervis:

« ... si, dans la catégorie « fruit », trois membres possèdent l'attribut « jaune » et cinq membres l'attribut « doit être pelé pour la consommation », l'item « banane » aura un score de ressemblance familiale d'au moins $3 + 5 = 8$. Pour sa part, l'item « bleuet » aura un score correspondant de 0. »

(Fortin et Rousseau, 1992, p. 349)

Selon Rosch et Mervis, pour qu'un objet soit reconnu comme typique de sa catégorie, il doit posséder la plus haute note de ressemblance avec les autres objets de la catégorie. Les résultats de cette expérience montrent une corrélation entre leur degré de ressemblance et leur rang de représentativité, ce qui signifie que l'élément du niveau de base qui est jugé le plus typique ou représentatif de la catégorie est celui qui possède le plus grand « nombre d'attributs qu'il partage avec les autres membres de sa catégorie » (Fortin et Rousseau, 1992).

Rosch a montré que lorsqu'on demande de produire, en temps limité (1 minute 30 secondes), une liste ordonnée d'objets appartenant à une catégorie naturelle comme les « arbres », les « poissons », les « fleurs », etc. les réponses des sujets permettent d'identifier des objets plus fréquemment cités que d'autres, et à propos desquels on fait l'hypothèse qu'ils sont plus accessibles dans la mémoire à long terme et plus facilement activés: ce sont les prototypes. Par ailleurs, dans la mesure où ces prototypes partagent le plus grand nombre d'attributs communs avec les autres membres de la catégorie qu'ils représentent, ils sont porteurs d'un grand nombre de connaissances qui peuvent être instanciées à partir de leur activation. Les prototypes constituent ainsi une référence à partir de laquelle les sujets

ordonnent les autres exemplaires. Par exemple, « l'érable » et « le sapin » ont été identifiés comme les exemplaires typiques de la catégorie « arbres » et « le geai bleu » et « l'aigle » ont été identifiés comme exemplaires typiques de la catégorie « oiseaux » par des élèves de 6e année du Québec (Ziarko, 1992, Ziarko et Tardif, à paraître). Un niveau élevé de typicalité du concept « facilite le traitement de l'information » (Richard, 1990):

«... les sous-catégories typiques sont plus rapidement catégorisées, plus précocement dénommées et plus vite apprises que les sous-catégories non-typiques ».(p.44)

En effet, le grand nombre de liens que le prototype entretient avec les autres membres de sa catégorie facilitent son activation.

Ainsi, les recherches précédemment mentionnées laissent croire à une organisation catégorielle hiérarchisée dont les éléments sont reliés les uns aux autres par une relation d'inclusion ou par la relation partie-tout. Dans ces catégories, les prototypes sont les exemplaires les plus représentatifs et ils ont un effet facilitateur sur le traitement des informations contenues dans un texte dont la lecture permet la construction de nouvelles connaissances conceptuelles.

De plus, l'utilisation du prototype assurera un accès rapide aux connaissances liées à la catégorie dont il est le représentant. On peut alors supposer que le recours aux prototypes dans un énoncé de problème aurait un effet facilitateur sur la construction de la représentation du problème additif, étant donnée la similitude partagée du point de vue de la relation d'inclusion.

PROBLÉMATIQUE ET HYPOTHÈSES DE RECHERCHE

Brun et Conne (1990) ont mené une recherche visant à analyser des situations didactiques mettant en jeu la résolution de problèmes arithmétiques. Les auteurs estiment que pour résoudre un problème arithmétique, l'élève doit mettre en oeuvre ses propres connaissances et celles exigées par le problème à résoudre. Ils considèrent les représentations élaborées par l'élève comme une succession de reconstructions dynamiques de la situation-problème plutôt que comme des étapes systématiques correspondant à des objectifs intermédiaires.

« En cherchant à dépasser les insuffisances qu'il rencontre dans ses projets de solution et en cherchant à s'adapter aux résistances de la situation, l'élève est censé modifier sa représentation jusqu'à ce qu'il considère avoir réussi. »

(Brun et Conne, 1990, p. 267)

Les recherches mentionnées montrent que la construction de la représentation du problème additif est sous l'influence de certaines caractéristiques de l'énoncé du problème dont les relations sémantiques, et de la mise en relation des données qui fait appel à une relation de type partie-tout.

Fayol note que l'élaboration et l'utilisation du schéma d'inclusion peuvent être facilitées ou non par la formulation de l'énoncé du problème. Il souligne que certains problèmes «se révèlent souvent ambigus du fait de leur brièveté» (Fayol, 1990). Ceux-ci obligent le solutionneur à recourir à des « présuppositions contextuelles et à des inférences » qui rendent plus difficiles la construction de la représentation et la résolution du problème. Selon lui, des relations sémantiques explicites facilitent cette activité cognitive.

Les travaux sur les catégories naturelles font apparaître que leur organisation est fondée sur une inclusion de classes (ou de la relation partie-tout), dont certaines sont plus prégnantes que d'autres, et à l'intérieur desquelles certains éléments sont plus représentatifs que d'autres. Les travaux de Rosch ont montré que c'est à partir de ces éléments: niveau de base, prototypes, que s'ordonnent les catégories d'objets naturels.

Les problèmes portant sur les transformations et les comparaisons causent des difficultés au jeune solutionneur. Nous avons vu que les travaux de Vergnaud ont montré que, pour les problèmes de transformation, subsistaient encore des difficultés à la fin du primaire, dues, notamment au calcul relationnel qu'ils impliquent. Les problèmes de comparaison, quant à eux, présentent dans leur énoncé, des expressions relationnelles qui rendent moins évidentes, pour le jeune solutionneur, la représentation des données du problème en terme de partie-tout. Par ailleurs, les résultats rapportés par Fayol (1990) montrent un taux de réussite élevé à la résolution de ces deux catégories de problèmes portant sur des états par des élèves de 2^e et de 3^e année du primaire. De ce fait, nous retenons pour les fins de cette recherche, les problèmes de transformation et de comparaison portant sur des états relatifs, afin d'apporter un éclairage nouveau sur le calcul relationnel réalisé par des sujets de 3^e année du primaire sur ces catégories de problèmes.

Ainsi, la présente recherche a pour objet de vérifier: 1) d'une part, dans quelle mesure les relations sémantiques impliquées par la compréhension de l'énoncé d'un problème additif influencent la construction de la représentation et en facilitent ou pas la résolution, que ce problème soit un problème de transformation d'états relatifs ou un problème de comparaison d'états relatifs; 2) d'autre part, quel est le calcul relationnel réalisé par le jeune solutionneur en situation de résolution de ces problèmes.

Les résultats des recherches rapportées nous conduisent à formuler les hypothèses suivantes:

Hypothèse 1: concerne la variable structure de connaissances S_2 :

1.a: les sujets qui traitent un énoncé de problème de « comparaison d'états relatifs » (p_1) faisant appel à une structure catégorielle activée à partir du prototype de la catégorie obtiendront des résultats significativement inférieurs aux résultats obtenus par ceux qui traitent un problème de « comparaison d'états relatifs » dont l'énoncé ne fait pas appel à une structure catégorielle et, ce, quel que soit l'opérateur sémantique mis en cause;

pour $p_2, s_1 < s_2$

1.b: les sujets qui traitent un énoncé de problème de « transformation d'états relatifs » (p_2) faisant appel à une structure catégorielle activée à partir du prototype de la catégorie obtiendront des résultats supérieurs à ceux qui traitent un problème de « transformation d'états relatifs » dont l'énoncé ne fait pas appel à une structure catégorielle et, ce, quel que soit l'opérateur sémantique mis en cause;

pour $p_1, s_1 > s_2$

Hypothèse 2: concerne la variable catégorie de problème P_2 :

les performances des sujets qui devront résoudre des problèmes de la catégorie « transformation d'états relatifs » (p_2) seront supérieures à celles des sujets qui devront résoudre des problèmes de la catégorie « comparaison d'états relatifs » (p_1), quelle que soit la structure de connaissances activée et quel que soit l'opérateur sémantique mis en cause;

pour s_1 et $s_2, p_1 > p_2$

Hypothèse 3: concerne l'interaction entre les variables opérateur sémantique O_2 et catégorie de problèmes P_2 :

3.a: à cause de la non-concordance entre opérateur sémantique et opérateur mathématique, les performances des sujets qui traitent un énoncé de problème présentant un opérateur sémantique positif de type "de plus", (o_1), seront inférieures à celles obtenues par les sujets qui devront résoudre un problème présentant un opérateur sémantique négatif de type "de moins", (o_2) et, ce, pour les problèmes de "comparaison d'états relatifs" (p_1);

pour p_1 , $o_1 < o_2$

3.b: à cause de la difficulté à traiter la situation d'emprunt évoquée dans le problème, les performances des sujets qui traitent un énoncé de problème présentant un opérateur sémantique négatif de type "emprunte" (o_2) (opérateur sémantique qui résulte en une augmentation de la dette), seront inférieures à celles obtenues par les sujets qui devront résoudre un problème présentant un opérateur sémantique positif de type "remet" (o_1) (opérateur sémantique² qui résulte en une diminution de la dette) pour les problèmes de "transformation d'états relatifs" (p_2);

pour p_2 , $o_2 < o_1$

² Pour alléger le texte, nous utiliserons le terme "opérateur" pour désigner un "opérateur sémantique" positif ou négatif.

CHAPITRE II

Description de l'expérience

PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

Ce chapitre vise à présenter les procédures expérimentales utilisées pour vérifier les hypothèses de recherche. Après un bref rappel du but de la recherche, nous traiterons de la sélection des sujets, de l'élaboration du matériel expérimental et du déroulement de l'expérience qui a permis de recueillir les données.

La présente recherche a été conçue afin de vérifier dans quelle mesure la formulation de l'énoncé d'un problème additif influence la stimulation de la relation d'inclusion chez le solutionneur et ce, dans des catégories différentes de problèmes additifs (problèmes de transformation d'états relatifs et problèmes de comparaison entre états relatifs). De plus, elle vise à analyser, de façon fine, les conduites de résolution de certains élèves.

Plus précisément, les travaux exposés dans le chapitre précédent nous ont conduit à faire l'hypothèse que la structure sémantique de l'énoncé du problème, a des effets différents sur le traitement effectué par le solutionneur. Ainsi, les performances d'un sujet qui traite un énoncé de problème de « transformation d'états relatifs » comprenant une structure de connaissances catégorielles (qui fait appel à une relation de type partie-tout) seront différentes de celles des sujets qui traitent un énoncé de la même catégorie de problème mais qui ne fait pas appel à une structure catégorielle. De même, les performances de résolution des problèmes de « transformation d'états relatifs » devraient être supérieures à celles des problèmes de « comparaison d'états relatifs » puisque les premiers présentent de façon plus évidente au solutionneur les données du problème en terme de relation partie-tout.

Pour vérifier les hypothèses de l'expérience, deux types d'analyse ont été utilisées. Il s'agit, d'abord d'une analyse quasi-expérimentale et, ensuite, d'une analyse des conduites de résolution

de certains sujets. Toutes les deux ont été réalisées avec des élèves de 3e année du primaire, qui ont, dans un premier temps, participé à deux mesures de connaissances: une épreuve mesurant leurs capacités à réaliser des inclusions de classes et une autre activité destinée à identifier les prototypes dans les domaines de connaissances (fleurs, oiseaux, arbres, instruments de musique) considérés par les énoncés de problèmes. Dans un deuxième temps, les sujets de l'analyse quasi-expérimentale ont résolu huit problèmes ayant une structure sémantique différente: avec structure catégorielle / sans structure catégorielle, et relevant des deux catégories de problèmes: transformation d'états relatifs et comparaison entre états relatifs. L'analyse des conduites de quelques-uns de ces élèves dans une démarche de résolution et de formulation de deux problèmes présentant les mêmes caractéristiques que ceux présentés dans l'analyse quasi-expérimentale.

1. La sélection des sujets

La première analyse a été effectuée auprès de 44 élèves de 3e année du primaire, répartis en deux groupes de 22 élèves chacun. Ces élèves fréquentent l'école Notre-Dame de Pointe-du-Lac de la commission scolaire de Chavigny. Ils appartiennent au même milieu socio-économique. Ils ont été sélectionnés parce que l'un des groupes forme le groupe-classe de l'expérimentatrice tandis que l'autre constitue la seconde classe de 3e année de cette école.

La 3e année du primaire a été retenue en raison de l'âge moyen des sujets, c'est-à-dire entre huit et neuf ans. Selon Piaget (1941), c'est vers cet âge que l'enfant comprend l'inclusion puisqu'il peut alors effectuer des groupements additifs de classes tels: $A + A' = B$ et $A = B - A'$.

Le groupe 1 a traité des problèmes dont l'énoncé correspond à une structure catégorielle tandis que les énoncés de problèmes correspondant à une structure non catégorielle ont été traités par le groupe 2.

Les procédés de résolution utilisés par un groupe restreint de sujets ont été analysés de façon plus explicite. Ce groupe est formé de six élèves dont les résultats scolaires, l'observation antérieure des comportements par leur enseignante et leurs résultats aux épreuves d'inclusion permettent de les identifier comme élève fort, moyen ou faible.

2. Le matériel expérimental

Les instruments de mesure élaborés pour les fins de cette recherche réfèrent à deux mesures de connaissances antérieures soit une épreuve piagétienne d'inclusion de classe et une recherche de prototype, ainsi que deux épreuves comprenant chacune quatre problèmes additifs à résoudre destinés à mesurer les effets des variables mises en cause par la formulation des énoncés.

L'analyse des conduites d'élèves a nécessité une épreuve comportant, d'une part, la résolution de deux problèmes additifs et, d'autre part, la formulation de deux énoncés de problèmes sur papier libre.

A. L' épreuve d'inclusion

Les instruments de mesure utilisés pour réaliser l'épreuve destinée à évaluer l' inclusion de classes sont repris de Piaget (1959) soit: les épreuves d'inclusion des classes réalisée par la composition additive des classes de perles et la composition additive de fleurs. Ces deux épreuves mesurent à quel stade de compréhension de la relation d'inclusion se situe l'élève. Pour ce faire, dans la première épreuve, l'expérimentateur présente dix-huit perles à l'enfant et l'amène à constater que toutes les perles sont en plastique. Puis s'en suit un schéma d'interrogatoire:

(question 1 de l'épreuve d'inclusion des classes - perles)

Peux-tu mettre en tas toutes les perles qui vont ensemble?

(Puis...) Y a-t-il plus de perles en plastique ou plus de perles jaunes?

justification ... (l'élève doit justifier sa réponse...)

La seconde épreuve d'inclusion consiste à présenter au sujet douze fleurs dont dix marguerites et deux roses. L'expérimentatrice fait nommer les fleurs et leurs couleurs par le sujet. Puis, elle s'assure que l'enfant comprend la classe "fleur" en lui demandant de nommer d'autres types de fleurs. Le schéma d'interrogatoire suivant a donc été présenté à l'élève:

(question 1 de l'épreuve d'inclusion des classes - fleurs)

Y a-t-il dans ce bouquet plus de marguerites ou plus de fleurs?

justification: Comment le sais-tu?

Les réponses aux questions de cette épreuve visent à identifier le stade de compréhension du concept d'inclusion de chaque sujet puisque pour résoudre des problèmes additifs, l'enfant s'appuie sur sa construction de la structure numérique: 1 est inclus dans 2, 2 est inclus dans 3...

1. correction de l'épreuve d'inclusion

L'épreuve d'inclusion a été corrigée selon la grille de correction proposée par Piaget (1959). Les stades de compréhension de la notion d'inclusion sont identifiés à partir des réponses des élèves et de leur justification. Pour faciliter la comparaison des performances obtenues entre les épreuves d'inclusion et la résolution de problèmes, les points suivants ont été attribués à chacun des stades de compréhension du concept de l'inclusion: aucun point n'a été attribué au stade 1, tandis que 6 et 12 points ont été respectivement attribués aux stades 2 et 3.

Un exemple du formulaire qui a guidé la passation de cette épreuve, la grille de correction et les résultats obtenus par les sujets sont présentés à la page 130 de l'appendice A.

B. L'établissement des prototypes

À partir des travaux de Rosch (1976), une autre mesure de connaissances antérieures a été effectuée auprès des sujets de la recherche en vue de la composition d'une banque de problèmes. Nous avons ainsi identifié les prototypes autour desquels ces sujets de 3e année organisent certains objets du monde qui les entourent. Il s'agit pour l'élève de produire en un temps limité (2 minutes) une liste ordonnée d'exemplaires relatifs aux catégories sur-ordonnées: fleurs, arbres, oiseaux, instruments de musique. Les exemplaires les plus représentatifs de chacune des catégories finalement retenus pour la formulation des problèmes, correspondent aux exemplaires les plus souvent cités et le plus souvent en première place.

Cette mesure assure que les exemplaires autour desquels a été élaborée la composition des énoncés de problèmes, sont suffisamment connus des élèves pour activer les connaissances qui leur sont attachées, notamment en ce qui concerne l'organisation catégorielle.

1. correction de la recherche de prototype

L'élément le plus fréquemment cité (établi en calculant les nombres moyens de citations pour chacun des éléments cités) est reconnu comme prototype ou élément le plus représentatif de la catégorie.

2. résultats obtenus

En ce qui concerne la catégorie *fleurs*, les exemplaires **tulipe** et **marguerite** ont été nommés par 86% des sujets et ils ressortent comme prototypes de la catégorie. L'exemplaire **rose** a été nommé par 69,7% des sujets tandis que le **pissenlit** a été cité par 55,8% d'entre eux. Le **lilas** vient au quatrième rang avec 20,9%, suivi de la **jonquille** avec 16,2%. Plusieurs autres exemplaires ont été rarement cités comme la **pivoine**, la **pensée**, le **pétunia** ...

En ce qui a trait à la catégorie *oiseaux*, l'exemplaire **pic-bois** ressort comme prototype puisqu'il a été cité par 56,8% des sujets comparativement à l'**aigle** qui a obtenu 38,6% des mentions. Le pourcentage de représentativité de la **corneille** est de 36,3%, tandis que l'**hirondelle** et le **pigeon** obtiennent respectivement 34% et 31,8% des citations. D'autres exemplaires comme le **geai**, le **rouge-gorge**, le **perroquet** n'ont été que très peu souvent cités.

À la page 146 de l'appendice A, les tableaux 5 et 6 rapportent les résultats de la recherche des prototypes pour les catégories fleurs et arbres. Les exemplaires retenus pour la composition des énoncés de problèmes se situent dans les cinq premiers nommés par les sujets.

C. L'élaboration des problèmes en vue de l'analyse quasi-expérimentale

La composition des énoncés de problèmes en ce qui concerne les objets de connaissances mis en cause a donc été effectuée à partir des résultats de la recherche de prototype pour la formulation des énoncés présentant une structure catégorielle. Par ailleurs, le choix de la catégorie de problèmes s'appuie sur la catégorisation et les travaux de Vergnaud (1982) qui font ressortir qu'à partir de huit et neuf ans (3^e année primaire) les problèmes additifs portant sur les compositions de transformations sont plus difficiles que ceux "mettant en jeu des états et une ou des transformations" (Vergnaud 1982, voir Fayol, 1991). Les seconds ne posent plus de difficulté

majeure à partir de cet âge tandis que les premiers sont l'occasion de fréquents échecs. Par ailleurs, Vergnaud (1991) a aussi montré que lors de l'acquisition du concept de nombre, celui-ci apparaît, entre autres, comme une relation (comparaison) entre mesures et une transformation de mesures qui peut opérer positivement ou négativement. Nous avons donc aussi choisi de vérifier les effets d'un opérateur positif ou négatif sur les performances de résolution des problèmes, et la variable "opérateur" a été combinée aux variables "structure" et "catégorie de problème" précédemment retenues.

Les domaines de connaissances représentés par les catégories naturelles "fleurs" et "oiseaux" ont permis d'élaborer des énoncés de problèmes correspondant à la structure catégorielle puisque tous deux relèvent de classes organisées. Par contre, l'ensemble d'objets "gommes à effacer" et "billes" illustrent des regroupements qui n'évoquent pas une organisation catégorielle hiérarchisée.

La première série de problèmes évalue l'effet d'un énoncé de problème additif présentant une structure de connaissances catégorielles sur la résolution des problèmes de transformation d'états relatifs ou de comparaison d'états relatifs qui comportent soit un opérateur négatif, soit un opérateur positif. Ces choix méthodologiques entraînent par conséquent des problèmes du type:

Paul et Marie sont fleuristes. Paul doit 187 jonquilles à Marie mais Marie doit 176 marguerites à Paul. Combien de fleurs Marie doit-elle de moins?

Les variables mises en cause dans cet énoncé sont: la structure catégorielle, la catégorie de problème: comparaison entre états relatifs et l'opérateur négatif.

Afin d'évaluer l'effet d'un énoncé ne référant pas à une structure de connaissances catégorielles sur le résolution des problèmes de transformation d'états relatifs ou de comparaison entre états relatifs qui présentent un opérateur négatif ou positif, il est nécessaire de présenter des problèmes du type:

Paul et Marie jouent aux billes aux récréations. Paul doit 187 billes à Marie mais Marie doit 176 billes à Paul. Combien de billes Marie doit-elle de moins?

Les variables mises en cause dans cet énoncé sont: l'absence de structure catégorielle, la catégorie de problème: comparaison entre états relatifs et l'opérateur négatif.

Une seconde série de problèmes a été élaborée, identique à la précédente du point de vue des variables mises en cause, sauf qu'à la place des "fleurs", on considère des "oiseaux" et que les "gommes à effacer" remplacent les "billes".

Pour chacun des énoncés de problèmes de la recherche, l'ordre de grandeur des nombres (données numériques) proposés est inférieur à celui proposé habituellement en classe à cette étape de l'année, puisque l'objectif de la recherche n'est pas de mesurer l'adéquation du calcul numérique.

1. correction des problèmes en vue de l'analyse quasi-expérimentale

La correction des problèmes des deux groupes s_1 et s_2 a été effectuée sur 3 points.

Protocoles des élèves du groupe 1 (énoncés avec structure catégorielle)

L'attribution des points est répartie ainsi: - 1 point est accordé lorsque la démarche de résolution et calcul numérique sont "corrects"; - 1 point est accordé pour la réponse du problème accompagnée de l'identification de la catégorie surordonnée; - 2 points sont accordés pour la

réponse du problème accompagnée de l'identification de l'exemplaire; - pour un total possible de 3 points.

Protocoles des élèves du groupe 2 (énoncés sans structure catégorielle):

L'attribution des points est répartie ainsi: - 1 point est accordé lorsque la démarche de résolution et calcul numérique sont "corrects"; - 2 points sont accordés pour la réponse du problème accompagnée de l'item de réponse; - pour un total possible de 3 points.

L'ensemble des problèmes présentés accompagnés d'exemples de solutions possibles et un exemple de protocole remis à l'élève sont présentés à l'appendice A , à la page 151.

D. Élaboration des problèmes en vue de l'analyse des conduites de résolution

L'expérience a nécessité la composition d'énoncés de problèmes auxquels ont été soumis six élèves en vue d'une analyse plus explicite de leurs conduites. L'élaboration de ces énoncés correspond à la même démarche méthodologique que celle privilégiée pour l'analyse quantitative. Pour les énoncés de problèmes qui font appel à une structure de connaissances catégorielles, il s'agit, d'une part, d'isoler le prototype des catégories choisies ("instruments de musique" et "arbres") et, d'autre part, de formuler l'énoncé de façon à ce que sa structure corresponde à un problème de transformation d'états relatifs et de comparaison entre états relatifs.

Pour les énoncés de problèmes qui ne comportent pas une structure de connaissances catégorielles, il importe de modifier le type de connaissances choisies par rapport aux énoncés de l'analyse quasi-expérimentale, ("autocollants" et "timbres") et de respecter la catégorie de problèmes. Par ailleurs, en vue d'analyser les conduites des élèves lors de la résolution de problèmes, Lemoyne et al., (1990) proposent d'utiliser la situation de formulation de problèmes

par l'élève. Celle-ci obligerait le sujet à "une activation de connaissances de diverses natures" et facilite pour le chercheur, l'examen des comportements.

Ces choix méthodologiques entraînent, d'une part, la résolution de problèmes du type:

(pour le groupe 1)

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les instruments de musique miniatures. Ils font souvent des échanges entre eux.

Julien avait 167 tambours à Julie. Il lui emprunte aussi des flûtes et il doit maintenant 189 instruments de musique à Julie. Combien de flûtes a-t-il empruntées à Julie?

(pour le groupe 2)

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les timbres. Ils font souvent des échanges entre eux.

Julien avait 167 timbres à Julie. Il lui emprunte encore des timbres et il doit maintenant 189 timbres à Julie. Combien de timbres a-t-il empruntés à Julie?

et, d'autre part, la formulation par l'élève de deux énoncés de problèmes semblables du point de vue de leur structure à ceux déjà résolus.

1. l'analyse des conduites de résolution et de formulation

L'analyse des conduites des sujets consiste à comparer les conduites des sujets lors de résolution d'un problème à celles de formulation d'un énoncé de problème "semblable". Les représentations qui font appel aux connaissances mathématiques du sujet (structure mathématique des problèmes soumis, relations entre les données du problème) et à ses connaissances sur le monde (connaissances catégorielles et modèles de situation) seront analysées.

Les travaux de Conne (1985) sur "les calculs numériques et les calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétiques" et les "analyses de protocoles d'énoncés rédigés par des élèves" (1985 et 1989) et ceux de Blanchet (1992) sur "l'invention de problèmes par des élèves" appuieront l'analyse des conduites des sujets de l'expérimentation.

PLAN EXPÉRIMENTAL

Dans l'analyse quasi-expérimentale, trois variables indépendantes ont été manipulées soit:

- la structure de connaissances S_2 , variable à deux niveaux dont le premier, s_1 , correspond à la présence d'une structure catégorielle, le second, s_2 , correspond à l'absence d'une telle structure;
- la catégorie de problèmes P_2 , variable à deux niveaux dont l'un, p_1 , correspond à la catégorie "comparaison entre états relatifs" tandis que l'autre, p_2 correspond à la catégorie "transformation d'états relatifs";
- l'opérateur O_2 , variable à deux niveaux dont l'un, o_1 , correspond à un opérateur positif tandis que l'autre, o_2 , correspond à un opérateur négatif.

Chacun des niveaux de la variable S_2 a été considéré en recourant à deux sortes d'objets fleurs/oiseaux pour s_1 et billes/gommes à effacer pour s_2 .

La variable dépendante qui correspond à la performance des sujets dans la résolution des problèmes, doublée d'une analyse descriptive des conduites de certains d'entre eux permettront de vérifier l'effet de la structure de connaissances catégorielles sur la résolution des problèmes additifs relevant des catégories: comparaison entre états relatifs et transformation d'états relatifs.

La combinaison des variables prises en compte conduit au schéma expérimental suivant:

		P_2	
		p_1	p_2
S_2	s_1	o_1/o_2	o_1/o_2
	s_2	o_1/o_2	o_1/o_2

S_2 : s_1 avec structure catégorielle
 s_2 sans structure catégorielle

O_2 : o_1 opérateur positif
 o_2 opérateur négatif

P_2 : p_1 comparaison d'états relatifs
 p_2 transformation d'états relatifs

Ce devis s'applique à chacune des instances permettant d'illustrer la variable S_2 . Il introduit des comparaisons inter-sujets sur la variable S_2 (structure de connaissances) et intra-sujets sur les variables P_2 (catégories de problèmes) et O_2 (opérateurs sémantiques). Ainsi, S_2 (structure catégorielle/structure non catégorielle) permet de constituer deux groupes distincts s_1/s_2 , qui sont soumis à des mesures répétées de la variable P_2 (type de problèmes) et O_2 (opérateur). Le devis sera répété de façon à prendre en compte, d'abord, la comparaison fleurs/billes, puis la comparaison oiseaux/gommes à effacer.

Pour contrôler l'effet d'ordre, la moitié des élèves de chaque groupe a d'abord été soumis à des problèmes de transformation d'états relatifs, tandis que l'autre moitié a solutionné d'abord des problèmes de comparaison d'états relatifs. De plus, dans le but d'annuler l'effet d'apprentissage, les problèmes dont l'énoncé fait appel à l'une ou l'autre des opérations ont aussi été présentés dans un ordre aléatoire, établi au préalable.

DÉROULEMENT DE L'EXPÉRIMENTATION

Première étape: l'épreuve d'inclusion

Dans un premier temps, les épreuves destinées à mesurer l'inclusion des classes: les perles et les fleurs se sont déroulées au cours du mois de novembre 1992.

Deuxième étape: la recherche de prototypes

Au cours du mois de décembre 1992, les sujets de l'expérimentation ont participé à une activité destinée à établir les prototypes des catégories: arbres, fleurs, oiseaux et instruments de musique.

Troisième étape: la résolution des problèmes en vue de l'analyse quantitative

En février 1993, a eu lieu la première partie de l'expérimentation. Les sujets du groupe 1 ont solutionné des problèmes dont l'énoncé correspond à une structure catégorielle sollicitant une opération mathématique d'addition ou de soustraction tandis que le groupe 2 a solutionné les mêmes problèmes comportant des contenus différents (billes, gommes à effacer). Chaque sujet a solutionné quatre problèmes. Comme il a été mentionné précédemment, l'ordre des problèmes était assigné au hasard pour chacun des sujets et on a contrôlé l'effet d'apprentissage.

L'expérimentation a nécessité deux rencontres qui ont été faites à environ deux semaines d'intervalle. Ces rencontres ont eu lieu durant le temps scolaire, sans interruption, et ont duré entre 30 et 45 minutes. Les sujets pouvaient prendre le temps nécessaire pour lire et résoudre les problèmes.

Les consignes ont été données oralement par l'expérimentatrice. Les sujets devaient résoudre quatre problèmes et il était précisé à l'élève l'importance de 1) laisser des traces de sa démarche de résolution et 2) indiquer, dans l'espace prévu à cette fin, la solution au problème. Par ailleurs, les élèves ont aussi été informés que, une fois une page de l'épreuve est tournée, ils ne peuvent revenir en arrière. Après la résolution de deux problèmes, une tâche de diversion (mot-mystère) a été proposée dans le but de vider la mémoire de travail et de contrôler l'effet d'apprentissage. Quinze minutes environ se sont ainsi écoulées entre les deux moments de résolution. La passation de ces deux épreuves expérimentales a été collective.

Quatrième étape: la résolution et la formulation des problèmes en vue de l'analyse des conduites de résolution

Cette partie de l'expérimentation s'est déroulée entre mai et juin 1993. La passation de cette épreuve a eu lieu sous forme de rencontre individuelle entre le sujet et l'expérimentatrice. Les modalités de passation de l'épreuve sont semblables à celles de l'épreuve collective. La passation a nécessité une rencontre durant les heures de classe, sans interruption, et a duré environ 30 minutes. Le sujet pouvait prendre le temps nécessaire pour lire, résoudre et formuler un problème.

Dans un premier temps, il s'agissait pour le sujet de résoudre, d'abord, le premier problème de l'épreuve (traces de la démarche et solution) et, par la suite, d'exprimer à l'expérimentatrice les relations sémantiques entre les données et les conduites de résolution qu'il a effectuées. Celle-ci a noté les verbalisations du sujet. Lorsque ce fut nécessaire, l'expérimentatrice a demandé à l'élève de préciser ses remarques. Par ailleurs, les verbalisations exprimées en cours de résolution ont été notées par l'expérimentatrice.

Dans un deuxième temps, le sujet est invité à formuler un problème de même structure que celui qu'il vient de résoudre. Il ne lui est pas permis de retourner à la page précédente. La même démarche est reprise pour le second problème de l'épreuve.

CHAPITRE III

Analyse et interprétation des résultats

Ce troisième chapitre rapporte les résultats de la recherche. Il s'agira, d'abord, de présenter les résultats permettant de vérifier le degré de corrélation existant entre les performances aux épreuves d'inclusion des classes et les performances de résolution des problèmes additifs et ce, pour les sujets de chacun des groupes s_1 et s_2 . Ensuite, nous présenterons les résultats de l'analyse statistique qui mènent à vérifier les effets des facteurs: structure de connaissances, catégorie de problèmes et opérateur sur la résolution des problèmes additifs soumis aux sujets de l'expérience. Enfin, les conduites de résolution utilisées par un nombre restreint de sujets seront analysées.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'interprétation des résultats et tentera de rendre compte des réponses apportées aux interrogations liées à la problématique de la recherche, tant en ce qui concerne les performances obtenues par les sujets, que les conduites adoptées pour résoudre les problèmes proposés.

ANALYSE DES RÉSULTATS

Performances de résolution des problèmes

Trois variables ont été manipulées dans la recherche, à savoir: la structure de connaissances des énoncés de problèmes à résoudre, d'une part, la catégorie de problèmes, d'autre part, et enfin, l'opérateur positif ou négatif mis en oeuvre dans la résolution.

Deux séries d'analyses ont été effectuées dont la première concerne les données recueillies ayant trait aux contenus « fleurs/billes », tandis que la deuxième série porte sur les contenus « oiseaux/gommes à effacer ».

La variable dépendante qui a été mesurée concerne la performance des sujets dans la résolution des problèmes.

Deux analyses MANOVA ont été effectuées pour chacun des groupes à partir des performances obtenues dans la résolution des problèmes. Le seuil de signification des effets mesurés a été fixé à 0,05. De plus, les résultats ont été contrastés de façon à identifier les interactions des variables.

A. Analyse préliminaire

Avant de mener les analyses permettant de vérifier les effets des trois variables manipulées dans la recherche, une analyse préliminaire a été réalisée. Elle concerne les données relatives aux résultats obtenus par les deux groupes de sujets aux épreuves d'inclusion des classes et à ceux qui concernent la résolution des problèmes. Les tableaux 3 et 4 de l'appendice A présentent les résultats obtenus par chacun des sujets aux épreuves d'inclusion des classes (fleurs et perles). Les figures 5, 6, 7 et 8 de l'appendice B présentent, quant à elles, les résultats de résolution des différentes catégories de problèmes confondues et les résultats aux deux épreuves d'inclusion des classes pour les groupes fleurs/billes et oiseaux/gommes à effacer.

L'observation de ces figures montrent qu'il ne semble pas y avoir de concordance entre les performances des sujets aux épreuves piagésiennes d'inclusion des classes et celles de la résolution des problèmes, tant pour les problèmes de "comparaison d'états relatifs" que pour ceux de "transformation d'états relatifs", ce qui est confirmé par l'analyse Bravais-Pearson.

Des calculs de corrélation ont été effectués entre les performances des sujets aux épreuves d'inclusion des classes et celles de la résolution des problèmes. Il en ressort qu'il n'y a pas de corrélation significative (0,16) entre les performances des sujets aux épreuves d'inclusion des classes et les résultats obtenus à l'ensemble des problèmes résolus par les deux groupes de sujets. De plus, on n'observe pas non plus de corrélation entre ces résultats aux épreuves d'inclusion des classes et ceux qui ont été obtenus pour les deux catégories de problèmes. Ainsi, pour les problèmes de comparaison d'états relatifs, l'analyse révèle un coefficient de 0,14, tandis qu'il est de 0,18 pour les problèmes de transformation d'états relatifs.

B. Analyses statistiques

1. Performances de l'étude fleurs/billes

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, le total des résultats possibles pour chacun des problèmes était de 3 points. Le tableau 7, de la page suivante, présente les scores moyens et les écarts-types obtenus par les deux groupes (s_1 : avec structure catégorielle et s_2 : sans structure catégorielle) de sujets et, ce, pour chacun des problèmes soumis dont les contenus concernent respectivement des « fleurs » et des « billes ».

Tableau 7

Moyennes (x) et écarts-types (s) des résultats obtenus selon la structure de connaissances (s_1/s_2), la catégorie de problèmes (p_1/p_2) et l'opérateur (o_1/o_2), pour l'étude fleurs/billes.

			P_2	
			p_1	p_2
s_1		x	1,09	1,18
	o_1	s	1,19	1,26
		x	1,59	1,45
	o_2	s	1,05	1,33
S_2				
		x	1,41	1,50
	o_1	s	1,30	1,34
s_2		x	1,91	1,09
	o_2	s	1,15	1,38

p_1 = comparaison d'états relatifs, p_2 = transformation d'états relatifs

s_1 = avec structure catégorielle, s_2 = sans structure catégorielle

o_1 = opérateur positif, o_2 = opérateur négatif

De ce tableau, il ressort que pour le groupe s_1 (avec structure catégorielle), les résultats obtenus sont inférieurs à ceux obtenus par le groupe s_2 (sans structure catégorielle) et, ce, pour l'ensemble des problèmes à l'exception de ceux de « transformation d'états relatifs » pour lesquels l'opérateur est négatif (p_2, o_2).

Par ailleurs, les données indiquent aussi que, lorsque l'opérateur est positif (o_1), la résolution des problèmes de "comparaison d'états relatifs" (p_1) est moins bien réussie que celle des

problèmes de "transformation d'états relatifs" (p_2), alors que c'est l'inverse quand l'opérateur est négatif.

À la lecture du tableau 7, nous notons également que les problèmes de "transformation d'états relatifs" (p_2) sont mieux réussis que ceux de "comparaison d'états relatifs" (p_1), à l'exception des problèmes de "transformation d'états relatifs" combinés à un opérateur négatif.

Tableau 8

Analyse de variance des résultats obtenus
selon la structure de connaissances (S_2), la catégorie
de problèmes (P_2) et l'opérateur (O_2), pour l'étude fleurs/billes.

SOURCE	SC	DL	CM	F	p
Inter (structure de connaissances S)	0,96	1	0,96	0,42	0,51
Intra (catégorie de problèmes P)	1,64	1	1,64	0,73	0,40
(opérateur O)	2,05	1	2,05	2,32	0,13
Interaction (S X P)	1,28	1	1,28	0,57	0,45
(S X O)	1,28	1	1,28	1,44	0,23
(P X O)	3,55	1	3,55	4,01	0,04*
(S X P X O)	1,28	1	1,28	1,44	0,23

* $p < 0,05$

Le tableau 8 présente les résultats obtenus à l'analyse statistique. Il montre qu'il n'y a pas d'effet simple des variables *structure de connaissances*, *catégories de problèmes* et *opérateur*.

Notre hypothèse 1 prévoyait des différences de performances entre les groupes s_1 et s_2 . Plus précisément, nous nous attendions à ce que les performances de résolution d'un énoncé de problème de "comparaison d'états relatifs" (p_1) faisant appel à une structure catégorielle (s_1) seraient significativement inférieures aux résultats obtenus par ceux qui traitent un problème de "comparaison d'états relatifs" (p_1) dont l'énoncé ne fait pas appel à une structure catégorielle (s_2) et, ce, quel que soit l'opérateur mis en cause (o_1 et o_2). L'hypothèse 1.a n'est donc pas vérifiée. De plus, nous nous attendions plutôt à ce que les performances de résolution des problèmes de "transformation d'états relatifs" soient supérieures pour le groupe s_1 et, ce, quel que soit l'opérateur mis en cause. Notre hypothèse 1 n'est donc pas vérifiée puisqu'on n'observe pas d'effet de la variables (S_2) structure catégorielle.

L'hypothèse 2 prévoyait des performances supérieures pour la résolution pour des problèmes de "transformation d'états relatifs", quelle que soit la structure de connaissances activée et quel que soit l'opérateur mis en cause; elle n'est donc pas vérifiée puisqu'on n'observe aucun effet simple de la variable (P_2) catégorie de problèmes.

Par contre, le tableau 8 nous permet d'observer un effet significatif d'interaction entre les variables "catégorie de problèmes" et "opérateur" ($p < 0,05$), ce qui était prévu par l'hypothèse 3. Nous nous attendions, d'une part, à ce que les performances de résolution des problèmes de "comparaison d'états relatifs" (p_1) dont l'opérateur est positif (o_1) soient inférieures à celles obtenues pour les problèmes sollicitant un opérateur négatif (o_2) et, d'autre part, à ce que les performances de résolution des problèmes de "transformation d'états

relatifs" (p_2) dont l'opérateur est négatif (o_2), soient inférieures à celles obtenues pour les problèmes sollicitant un opérateur positif (o_1). L'hypothèse 3 est donc vérifiée.

L'observation du tableau 8 et de la figure 9, permet de remarquer que, pour le groupe s_1 , les scores obtenus à la résolution des problèmes de comparaison d'états relatifs (p_1) pour lesquels l'opérateur est positif (o_1) sont plus faibles que ceux des problèmes de transformation d'états relatifs (p_2) avec le même opérateur. Par contre, ces performances sont inversées lorsqu'il s'agit de la résolution des problèmes de comparaison d'états relatifs avec un opérateur négatif (o_2).

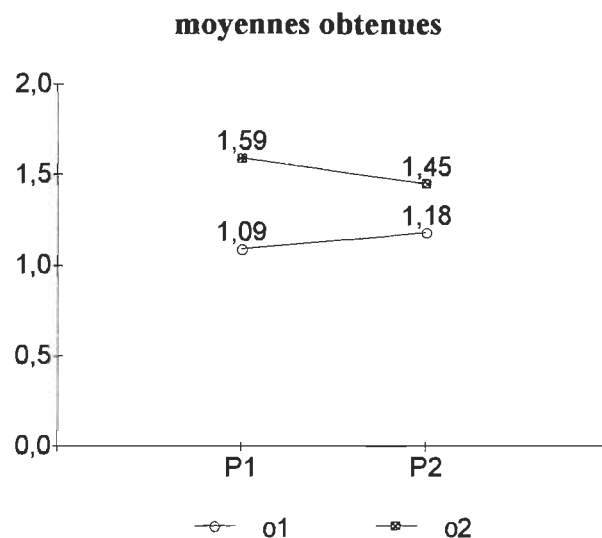


Figure 9: Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes avec structure catégorielle (fleurs)

De même, la figure 10 de la page suivante, révèle, de façon plus explicite l'interaction produite par l'effet conjugué des deux variables lors de la résolution de problèmes ne comportant pas de structure catégorielle.

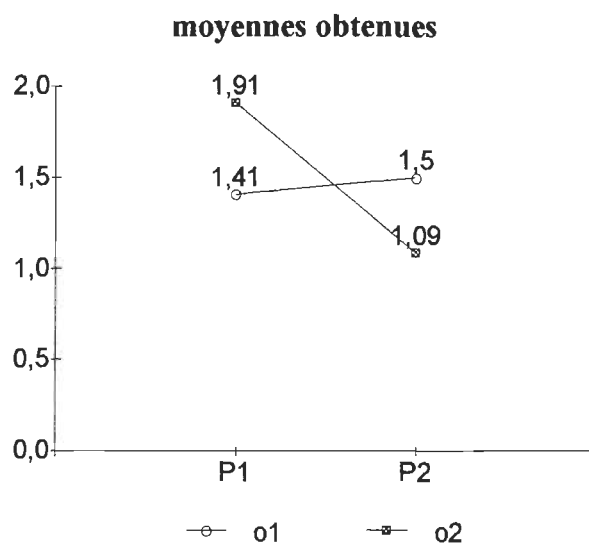


Figure 10: Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes sans structure catégorielle (billes)

1.2 Performances de l'étude oiseaux/gommes à effacer

Le tableau 9 de la page suivante, présente les scores moyens et les écarts-types obtenus par les deux groupes (s_1 : avec structure catégorielle et s_2 : sans structure catégorielle) de sujets et ce, pour chacun des problèmes soumis dont les contenus concernent respectivement les « oiseaux » et les « gommes à effacer ».

Tableau 9

Moyennes (\bar{x}) et écarts-types (s) des résultats obtenus selon la structure de connaissances (s_1/s_2), la catégorie de problèmes (p_1/p_2) et l'opérateur (o_1/o_2), pour l'étude oiseaux/gommes à effacer.

			P_2	
			p_1	p_2
S_1		\bar{x}	1,09	1,64
	o_1	s	1,27	1,36
		\bar{x}	1,95	1,45
	o_2	s	1,04	1,09
S_2				
s_2		\bar{x}	1,04	2,00
	o_1	s	1,36	1,31
		\bar{x}	2,04	0,82
	o_2	s	1,13	1,22

p_1 = comparaison d'états relatifs, p_2 = transformation d'états relatifs

s_1 = avec structure catégorielle, s_2 = sans structure catégorielle

o_1 = opérateur positif, o_2 = opérateur négatif

À la lecture de ce tableau, nous voyons que dans le groupe s_1 , les performances démontrées à la résolution des problèmes de "comparaison d'états relatifs" sont légèrement supérieures à celles obtenues par le groupe s_2 lorsque l'opérateur est positif. Par contre, on observe des résultats inversés lorsque l'opérateur est négatif.

Pour les problèmes de "transformation d'états relatifs", les résultats obtenus par le groupe s_1 sont inférieurs à ceux obtenus par le groupe s_2 , lorsque l'opérateur est positif et c'est l'inverse quand l'opérateur est négatif. Par ailleurs, on observe l'inverse lorsque

l'opérateur est négatif. Enfin, la lecture de ce tableau fait apparaître un effet d'interaction des variables: catégorie de problèmes et opérateur.

Tableau 10

Analyse de variance des résultats obtenus
selon la structure de connaissances (s_1, s_2), la catégorie
de problèmes (p_1, p_2) et l'opérateur (o_1, o_2), pour l'étude oiseaux/gommes à effacer.

SOURCE	SC	DL	CM	F	p
Inter (structure de connaissances S)	0,05	1	0,05	0,02	0,88
Intra (catégorie de problèmes P)	0,96	1	0,96	0,44	0,51
(opérateur O)	0,05	1	0,05	0,05	0,82
Interaction (S X P)	0,00	1	0,00	0,00	0,96
(S X O)	0,69	1	0,69	0,72	0,40
(P X O)	35,46	1	35,46	36,93	0,00*
(S X P X O)	1,64	1	1,64	1,71	0,19

* $p < 0,01$

Le tableau 10 nous permet d'observer qu'il n'y a pas d'effet simple des variables: structure de connaissances, catégorie de problèmes et opérateur.

Pour les résultats concernant la structure de connaissances des énoncés de problèmes, nous faisons l'hypothèse que, les résultats obtenus par les sujets ayant à traiter un énoncé de problèmes de "comparaison d'états relatifs" (p_1) faisant appel à une structure de connaissances catégorielles (s_1) seraient significativement inférieurs à ceux obtenus par les sujets qui traitent un énoncé de problème de "comparaison d'états relatifs" (p_1) dont l'énoncé

ne fait pas appel à une structure catégorielle (s_2) et, ce, quel que soit l'opérateur mis en cause (o_1 et o_2). L'hypothèse 1.a n'est donc pas vérifiée. Par ailleurs, les résultats obtenus ne permettent pas non plus de vérifier l'hypothèse 1.b qui prévoyait que les performances de résolution des problèmes de "transformation d'états relatifs" (p_2) seraient supérieures pour le groupe s_1 et, ce, quel que soit l'opérateur mis en cause.

En ce qui concerne la variable "catégorie de problèmes", nous nous attendions à ce que les performances de résolution des problèmes de "transformation d'états relatifs" (p_2) soient supérieures quelle que soit la structure de connaissances activée et quel que soit l'opérateur mis en cause. Les résultats du tableau 10 montrent que l'hypothèse 2 n'est pas vérifiée.

Comme dans l'étude qui comparait des problèmes portant sur des billes et des fleurs, le tableau nous permet d'observer, là aussi, un effet d'interaction entre les variables "catégorie de problèmes" et "opérateur" ($p < 0,01$). L'hypothèse 3 est donc vérifiée.

Les figures 11 et 12 de la page suivante montrent de façon explicite l'effet conjugué des deux variables.

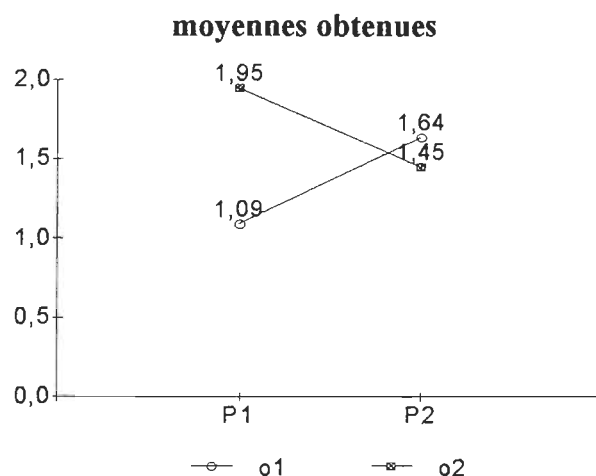


Figure 11: Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes avec structure catégorielle (oiseaux)

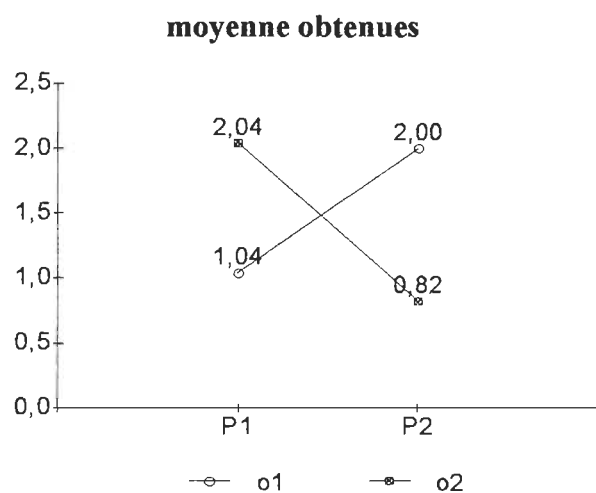


Figure 12: Effet de la catégorie de problèmes et de l'opérateur, pour la résolution des problèmes sans structure catégorielle (gommes à effacer)

Conformément à l'hypothèse formulée, les résultats obtenus à la résolution des problèmes sollicitant un opérateur positif (o_1) sont inférieurs à ceux obtenus à la résolution des problèmes sollicitant un opérateur négatif (o_2) et, ce, pour les problèmes de "comparaison d'états relatifs" (p_1). De plus, les performances des sujets qui traitent un énoncé de problème sollicitant un opérateur négatif (o_2) ont été, tel qu'attendu, inférieures à celles des sujets qui

traitent un problème sollicitant un opérateur positif (o_1) pour les problèmes de "transformation d'états relatifs". L'hypothèse 3 est donc vérifiée.

En conclusion aux analyses des résultats obtenus par la recherche, il faut donc retenir l'influence de la combinaison des variables catégorie de problèmes et opérateur. Par ailleurs, contrairement à nos hypothèses, on n'observe pas un effet simple de la variable structure de connaissances ni de la variable catégorie de problèmes.

ANALYSE DE PROTOCOLES

Dans ce chapitre, les conduites des sujets lors de la résolution des problèmes de comparaison d'états relatifs et de transformations d'états relatifs ainsi que les énoncés de problèmes "semblables" formulés par les sujets sont analysés selon une approche qualitative, notamment par une analyse de protocoles.

Selon Blanchet (1992), lorsque l'enfant est appelé à résoudre de nouveaux problèmes mathématiques, il est "constamment en train de manipuler des représentations très variées et très spécifiques", représentations qui font appel non seulement à ses connaissances propres aux mathématiques, mais aussi à l'ensemble de ses connaissances. Si nous ne pouvons avoir accès directement aux diverses représentations construites par le sujet au cours de la résolution d'un problème, les verbalisations et les calculs numériques auxquels donnent lieu cette activité nous permettent toutefois de formuler des hypothèses sur les relations effectuées par le sujet entre les données du problème. La formulation par l'élève d'un autre énoncé de problème, "semblable" à celui qui lui est soumis, nous permet de compléter l'analyse de la mise en relation des données effectuée par l'élève.

Toutefois, il est important de souligner une limite de cette analyse. Les réponses des sujets lors de la résolution de problèmes contiennent deux éléments: le résultat du calcul numérique et le terme catégoriel ou le contenu auquel se rapporte ce résultat. Nous n'avons pas exigé que les réponses soient formulées par une phrase complète du type: "*Marie doit 51 billes de plus que Jean*". Il nous est donc difficile de préciser la nature du nombre fourni dans la réponse (état ou état relatif) et, par conséquent, de préciser s'il y a eu distanciation du schéma de base correspondant au type de problème, c'est-à-dire si le problème est assimilé aux cadres de pensée de l'enfant (Brun, 1990). Toutefois, l'examen des énoncés de problèmes "semblables" formulés par les sujets pour chaque problème résolu et la comparaison de ces

énoncés avec ceux des problèmes soumis nous permet de faire des hypothèses sur le traitement des relations du problème résolu et, donc, de mieux comprendre de quelle façon ils ont contourné les difficultés rencontrées avec le calcul relationnel.

Analyse des conduites du sujet 18

A. Problème de comparaison d'états relatifs avec structure catégorielle

problème soumis:

Jean-François et David vendent des arbres. Ils possèdent chacun une pépinière. Il leur arrive parfois de faire des échanges. Jean-François doit 154 érables à David mais David doit 169 sapins à Jean-François. Combien d'arbres David doit-il de plus?

procédure de résolution utilisée:

$169 - \boxed{15} = 154$
réponse: 15 arbres

Calcul numérique

Verbalisation sur le calcul relationnel

opération utilisée: soustraction
lacunaire

- j'ai cherché le nombre-mystère: j'ai fait une soustraction
- je ne me suis pas occupé des sapins, des érables, des arbres
- le "de plus" m'a guidé

problème formulé:

Alexandre et Véronique vendent des fruits, ils s'en échangent. Alexandre a 357 ananas Véronique a 434 pommes. Combien de fruits séparent (entre les deux) les deux amis?

Le problème $s_{1c1p1o1}$ est sur le plan numérique bien résolu par le sujet 18. Le libellé de la réponse montre l'utilisation du terme qui correspond à la catégorie surordonnée (arbres) telle que formulée dans la question. Selon les verbalisations du sujet, les termes catégoriels (sapins, érables et arbres) n'ont pas été retenus comme éléments pertinents pour le problème, ce qui a sans doute libéré la mémoire de travail du sujet et facilité les opérations de pensées nécessaires à l'identification d'une relation de comparaison pour le calcul relationnel. La

complexité du calcul relationnel tient, dans ce problème, non seulement au traitement d'états relatifs mais aussi au traitement de l'expression "de plus", dans laquelle le mot "plus" est associé à l'addition et suggère la recherche d'un tout, alors que ce problème de comparaison implique la recherche d'une différence et, par conséquent, d'une partie. La procédure utilisée montre bien que, pour l'enfant, 169 correspond à la mesure du tout (la dette de David), 154 à la mesure d'une des parties (la dette de Jean-François), l'autre partie correspondant à la mesure de la différence entre les deux dettes. Ainsi, pour connaître la seconde partie, le sujet a effectué une soustraction lacunaire en raisonnant dans le domaine des nombres naturels. Le sujet ne semble avoir éprouvé aucune difficulté à déplacer mentalement la dette de Jean-François dans celle de David; il a ainsi fait abstraction des termes catégoriels pour traiter les relations numériques de parties à tout, montrant de ce fait, une bonne représentation du problème de comparaison. Pour lui, l'identification des parties et du tout ne tient pas, dans ce problème, aux contenus sur lesquels portent les données numériques.

Le problème formulé par l'élève respecte en partie la structure attendue puisqu'il s'agit d'un problème de comparaison, sauf que dans son énoncé il s'agit d'une comparaison d'états plutôt que d'états relatifs. On peut formuler l'hypothèse que la résolution du problème soumis effectuée par l'enfant résulte d'une distanciation du schéma de base: l'enfant semble avoir traité les états relatifs comme des états, c'est-à-dire avoir considéré les nombres-relatifs (dettes) comme des nombres-mesures, soit des états. Dans cette perspective, "*Jean-François doit 154 érables à David*" est sans doute interprété comme "*Jean-François a 154 érables qui appartiennent à David*".

Bien que l'expression "de plus" ait conduit l'enfant à identifier la relation entre les données du problème soumis, elle est cependant absente de l'énoncé formulé. Ce sont les expressions "séparent" et "entre les deux" qui sont utilisées pour marquer la relation de comparaison. Le choix de ces expressions rappelle toutefois que le sujet cherche à identifier

l'écart entre deux mesures et semble ainsi lié au calcul numérique en jeu c'est-à-dire la soustraction, qui "renvoie à une situation de tout à partie" (Conne, 1985). Aussi, si la question était: *Combien Alexandre a-t-il de fruits de moins que Véronique*, l'équation correspondante serait: $434 + (-r) = 375$ ou $375 - 434 = -r$; alors que si la question était: *Combien Véronique a-t-elle de fruits de plus qu'Alexandre*, l'équation serait: $375 + (+r) = 434$ ou $434 - 375 = +r$. Toutefois, les expressions relationnelles utilisées traduisent bien la difficulté, souvent relevée dans les études, à traiter les relations "de plus" et "de moins".

Bien que le sujet ait ignoré les termes catégoriels au moment de la résolution du problème, il se montre cependant capable de formuler un problème de comparaison en respectant les contraintes liées à la structure catégorielle, le choix des exemplaires (ananas et pommes) et l'utilisation du terme catégoriel (fruits) étant appropriés. On peut dès lors considérer que des reconstructions dynamiques du problème ont jalonné le processus de résolution et possiblement celui de la formulation du problème (Brun et Conne, 1990). Les résultats du sujet 18 aux épreuves piagésiennes d'inclusion indiquent que cet élève accède facilement à une représentation qui fait appel à une relation inclusive (stade 3). Ce résultat est en accord avec l'analyse de la résolution du problème soumis et celle de la formulation de problème.

B. Problème de transformation d'états relatifs avec structure catégorielle

problème soumis:

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les instruments de musique miniatures. Ils font souvent des échanges entre eux.

Julien avait 167 tambours à Julie. Il lui emprunte aussi des flûtes et il doit maintenant 189 instruments de musique à Anne. Combien de flûtes Julien a-t-il empruntées à Julie?

procédure de résolution utilisée:

$167 + \boxed{22} = 189$
réponse: 22 flûtes

Calcul numérique

opération utilisée: addition
 lacunaire

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *il est presque pareil:*
les nombres sont différents
il emprunte: donc un qui prend et un qui donne
- *j'ai cherché le nombre-mystère*
- *je me suis occupé des « tambours » et des « flûtes » seulement pour la réponse*
- *dans la question, on cherchait des flûtes*
- *les mots « combien » et « empruntées » étaient les mots à suivre*
- *je peux faire une soustraction: à partir de 167, je dois me rendre à 189*

problème formulé:

Jean-Philippe et Maxime vendent des outils de travail.
Jean-Philippe a emprunté 39 outils après que Jean-Philippe a pris les 39 outils
Maxime en avait 137. Combien d'outils avait Maxime avant que Jean-Philippe en prenne?

Le problème $s_1c_1p_2o_2$ est, au plan numérique, bien résolu par le sujet 18. Le procédé mis en place pour effectuer le calcul indique une souplesse du sujet quant au type d'opération à utiliser: le commentaire de l'élève est, à ce propos, fort éloquent: "*je peux faire une soustraction, à partir de 167 je dois me rendre à 189*". Alors que la première proposition précise clairement l'opération de soustraction, la seconde suggère une procédure de complément qui nécessite une addition. Si le recours au procédé qui consiste à trouver le complément calque bien la chronologie des événements décrits dans l'énoncé de problème, il semble que le choix de ce procédé relève davantage d'une appréciation de l'écart entre les nombres. Ainsi, pour ce sujet, il est plus économique de chercher ce qui manque à 167 pour

obtenir 189 que de procéder à un calcul soustractif. Ce raisonnement s'appuie assurément sur une bonne identification des relations numériques entre les parties et le tout.

Le sujet souligne la ressemblance que ce problème entretient avec le précédent. Bien que ces problèmes soient de structures différentes, le contexte d'échange est un élément commun aux deux problèmes. Les verbalisations du sujet au cours de la résolution montrent qu'il tente d'identifier certaines actions associées à une situation d'échange, actions qui pourraient se traduire par une ou des opérations arithmétiques: *"il emprunte, donc un qui prend (+) et un qui donne (-)"*. Toutefois, cela conduit aussi le sujet à la recherche d'un registre (Conne, 1985): est-ce un registre d'augmentation ou de diminution? La situation peut évoquer un registre d'augmentation si l'on considère que celui qui emprunte fait un gain (état) ou augmente sa dette (état relatif). C'est toutefois aussi une situation de diminution d'un avoir (état) pour le prêteur, comme pour l'emprunteur dans la mesure où la dette devient plus importante. Selon les commentaires du sujet, ce sont les mots "combien" et "empruntées" qui lui permettent de donner du sens au problème. Il est possible que ces mots suggèrent à l'élève le registre dans lequel le calcul doit s'effectuer: celui de l'augmentation, et qui cherche à quantifier cette augmentation, c'est-à-dire cette transformation. Ainsi, le calcul relationnel élaboré semble pertinent pour résoudre le problème puisque le sujet recherche une partie du tout, étant donnée une première partie. L'examen du problème formulé par ce sujet nous donne des informations supplémentaires sur le calcul relationnel effectué lors de la résolution, notamment sur le traitement des états relatifs.

Le problème formulé relève d'une structure de type transformation d'états. Le contexte d'échange s'avère toutefois plus présent dans l'énoncé formulé par l'élève que dans celui du problème soumis. Les schémas de connaissances de l'élève sur ce contexte semblent avoir été mis à contribution. L'intention de l'élève est de marquer une situation d'échange en inscrivant dans le temps les actions liées à la transaction. Ainsi, l'énoncé comporte une

redondance qui n'est cependant pas fortuite; elle permet de marquer la chronologie des événements ("*... après que Jean-Philippe a pris les 39 outils Maxime en avait 137*" plutôt que "*Maxime en a 137*"). Il faut aussi souligner la cohérence de la question: "*Combien d'outils avait Maxime avant que Jean-Philippe en prenne?*". La question porte sur un état, notamment sur l'état initial, plutôt que sur la transformation, comme c'était le cas dans le problème soumis. Par contre, tout comme lors de la résolution du problème soumis, l'élève résout le problème en effectuant une addition.

Ainsi, l'analyse du problème formulé révèle que l'élève a résolu un problème d'états plutôt que d'états relatifs. De fait, il est plus économique pour le sujet de procéder à l'identification du registre et à la mise en relation des données qui en découle, en considérant les états relatifs comme des états. Par ailleurs, le sujet n'a pas recours à une structure catégorielle dans le problème formulé; on peut penser que les efforts fournis pour rendre compte des relations, notamment à travers la chronologie des événements semblent avoir alourdi la charge cognitive nécessaire à l'accomplissement de la tâche, et mobilisé toute l'attention du sujet.

Analyse des conduites du sujet 8

A. Problème de comparaison d'états relatifs avec structure catégorielle

problème soumis:

*Marie-Élaine et Rosaline vendent des arbres. Elles possèdent chacune une pépinière. Il leur arrive de faire des échanges entre elles.
Marie-Élaine doit 178 érables à Roseline mais Roseline doit 167 sapins à Marie-Élaine. Combien d'arbres doit-elle de moins?*

procédure de résolution utilisée:

$$178 - 167 = 11$$

réponse: 11 érables et sapins

Calcul numériqueVerbalisation sur le calcul relationnel

opération utilisée: soustraction

- *les érables et les sapins se mélangent: je ne sais plus si ce sont des érables ou des sapins*
- *Marie-Élaine doit et Roseline doit mais on demande combien Roseline doit de moins*
- *« de moins » : je fais une soustraction*
- *si c'était « de plus », j'aurais fait une addition*
- *ça mêle: sapins - érables - arbres, parce qu'à la fin tu ne sais pas si ce sont des sapins... ou des érables... ou des arbres*

problème formulé:

*Jessy et Marie-Ève font une vente de fruits et légumes.
Marie-Ève donne 19 tomates à Jessy et Jessy donne 17 pommes à Marie-Ève.
Mais Marie-Ève doit 3 tomates à Jessy et Jessy doit 10 tomates à Marie-Ève.
Combien Jessy doit-elle de pommes en moins?*

La réponse numérique au problème $s_1, c_1 p_1, o_2$ donnée par le sujet, est juste. Toutefois, les verbalisations de ce sujet en cours de résolution suggèrent que le calcul relationnel a posé des difficultés. L'expression "de moins" semble avoir fourni un indice sémantique qui a conduit au choix de l'opération. Cette expression est associée, dans la résolution de ce problème, non à une relation mais plutôt à l'opération de soustraction (moins), opération qui évoque une diminution. Cette analyse repose sur les commentaires suivants de l'élève: "*de moins, je fais une soustraction; si c'était de plus, j'aurais fait une addition*". La réponse numérique ne peut donc être considérée comme le résultat d'un calcul relationnel qui repose sur une bonne identification des relations numériques entre les parties et le tout.

Il n'est pas étonnant, alors, que ce sujet éprouve des difficultés à traiter les termes catégoriels. Le nom des exemplaires "érables" et "sapins" qui accompagnent le résultat numérique marquent la difficulté à traiter la structure catégorielle de l'énoncé; "*ça mêle*,

sapins, érables et arbres parce qu'à la fin tu ne sais pas si ce sont des sapins ou des érables ou des arbres". Puisque les opérations de pensée n'ont pas permis l'identification des relations numériques parties-tout à partir d'une relation de comparaison entre les états relatifs, il est évidemment difficile pour le sujet d'identifier à quel contenu se rapporte le résultat numérique. Bien que l'élève semble posséder les connaissances catégorielles qui lui permettent de distinguer les exemplaires de la catégorie surordonnée, ces connaissances ne sont d'aucun support au calcul relationnel puisqu'il n'existe pas de correspondance entre les relations numériques parties-tout et les relations catégorielles. Il semble que c'est la raison pour laquelle le libellé de la réponse contient le nom des exemplaires (sapins et érables) plutôt que le terme catégoriel "arbres" qui englobe les exemplaires "sapins" et "érables", et qui apparaît pourtant dans la question.

Dans le problème formulé par l'élève, la question correspond à un problème de type comparaison entre états relatifs. Toutefois, cette question est peu cohérente avec les données du problème. Deux séries de données sont énoncées dans le problème. La première série comporte des données qui correspondent à des transformations (*Marie-Ève donne 19 tomates et Jessy donne 17 pommes à Marie-Ève*); la deuxième série comporte des données qui correspondent à des états relatifs (*Marie-Ève doit 3 tomates à Jessy et Jessy doit 10 tomates à Marie-Ève*). Si la question est formulée en termes d'états relatifs, l'exemplaire choisi (pomme) est inapproprié puisqu'il réfère à la première série de données, c'est-à-dire aux transformations. Un examen attentif des relations entre les données et la question nous permet de formuler des hypothèses sur les représentations qui ont présidé à la formulation du problème.

Si l'on considère que le verbe "donner" marque une situation d'emprunt et qu'il traduit ainsi une dette pour celui qui reçoit, les données formulées en termes de transformations peuvent être interprétées en terme d'états relatifs (*Jessy doit alors 19 tomates à Marie-Ève et*

Marie-Ève 17 pommes à Jessy); la question (*Combien Jessy doit-elle de pommes en moins?*) gagne dès lors en cohérence. Toutefois, elle est incohérente du point de vue de la structure catégorielle puisqu'elle aurait dû rappeler la catégorie surordonnée ("fruits" et "légumes") et non l'exemplaire. Soulignons que l'expression relationnelle "de moins" est modifiée par le sujet et devient "en moins"; nous formulons l'hypothèse que cette nouvelle expression réduit le caractère de comparaison et joue un rôle indicateur quant au calcul numérique en jeu.

Cette analyse montre que le sujet cherche à produire un énoncé de problème qui rappelle un contexte d'échange en recourant aux états relatifs avec les difficultés qu'impose une gestion adéquate des relations numériques et catégorielles. On assiste alors à des tentatives d'adaptation en cours d'énonciation pour respecter les contraintes de formulation: contexte d'échange, états relatifs et relation de comparaison.

B. Problème de transformation d'états relatifs avec structure catégorielle

problème soumis:

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent des instruments de musique miniatures. Ils font souvent des échanges entre eux. Julien devait 186 instruments de musique à Julie. Il lui remet des flûtes. Julien ne lui doit plus que 145 tambours. Combien d'instruments de musique Julien a-t-il remis à Julie?

procédure de résolution utilisée:

$$186 + 145 = 331$$

réponse: 331 instruments

Calcul numérique

opération utilisée: addition

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *est-ce que c'est en tout ?*
- *on en a déjà fait en classe*

- *que ce soit des flûtes ou des tambours, ça n'a pas d'importance pour savoir comment résoudre le problème*
- *l'autre problème me disait quoi faire (de moins), lui il n'y a rien qui me dit quoi faire*
- *en le lisant - ça me disait de faire une addition; peut-être à cause de la question, du mot "combien"*
- *je sais que la réponse sera des instruments parce que c'est ce qui est demandé dans la question*
- *« remis »: tu me le donnes et je te le redonne*
- *« donné »: je te le donne et tu le gardes*
- *« remis » ne va pas avec le problème que j'ai fait (quand on me remet :j'en ai)*
- *si la question dit « de moins » ça ne marche pas avec une addition*
- *des flûtes ou des tambours - tu ne sais pas lesquels écrire, alors, moi j'écris les 2 pour ne pas me tromper*

problème formulé:

*Les jumelles Vicky et Marie-Eve collectionnent des fleurs.
Vichy lui remet 313 des tulipes. Marie-Eve lui remet 131 de marguerites.
Combien de fleurs seront-ils (sic) donné?*

Le problème s_1, c_1, p_2, o_1 est traité par le sujet comme un problème de composition d'états relatifs. De même qu'au problème précédent, la construction d'une représentation du problème semble reposer chez cet élève sur l'identification d'indices sémantiques. Le mot "combien" repéré par l'élève semble lui suggérer l'opération d'addition. Ainsi, le sujet demande à la fin de la lecture du problème; "*est-ce en tout?*", ce qui témoigne de l'activation d'une catégorie de problème inappropriée. Il est probable que, pour contourner la difficulté que représente le calcul relationnel, l'énoncé "ne lui doit plus que 145 tambours" soit "modifié" par le sujet pour en réduire la complexité et devienne ainsi: "lui doit en plus (ou de

plus) 145 tambours". Le mot "plus" suggère alors une mise en relation simplifiée qui débouche sur la recherche d'un état relatif composé. Le calcul relationnel ne porte plus, dès lors, sur la recherche d'une transformation étant donné un état initial et un état relatif final mais plutôt sur la composition de deux états relatifs. Le sujet a évité l'impasse et peut s'engager dans une procédure numérique garantie par un calcul relationnel adapté à ses cadres de pensée. Cette hypothèse est cohérente avec celle que nous avons formulée lors de l'analyse de la formulation du problème précédent, hypothèse selon laquelle l'expression "de moins" a été remplacée par le sujet, par l'expression "en moins" pour marquer l'opération numérique à effectuer.

La structure catégorielle de ce problème ne permet pas au sujet d'inférer la relation numérique parties-tout. Selon nos hypothèses de recherche, la structure catégorielle peut faciliter le calcul relationnel de ce type de problème. Toutefois, les contenus catégoriels auxquels se rapportent les données numériques ne sont pas considérés comme éléments pertinents par ce sujet: *"que ce soit des flûtes ou des tambours, ça n'a pas d'importance pour savoir comment résoudre le problème"*.

Le problème formulé par le sujet conforte l'analyse précédente. En effet, ce problème relève d'une structure de composition de transformations. Le choix du verbe "remettre" traduit l'intention du sujet à traiter une situation d'échange en évitant de recourir à des états relatifs (tout comme au premier problème formulé). Toutefois, la question qui porte sur la composition est peu pertinente pour une situation d'échange et conduit à traiter les nombres-transformations comme des nombres-mesures. En effet, la solution attendue se présente sous cette forme: $T1 + T2 = T3$ (T, correspondant à "transformation"); cette solution ne prend nullement en compte des valeurs relatives des transformations et, par conséquent, peut correspondre à une solution de type $M1 + M2 = M3$ (M, correspondant à "mesure").

Par ailleurs, la structure catégorielle proposée est adéquate. En effet, une bonne correspondance entre les relations numériques et les relations catégorielles est effectuée; les exemplaires cités se rapportent bien aux parties et la catégorie surordonnée au tout (sur le plan numérique). La réussite du sujet aux épreuves d'inclusion (stade 3) suggère, d'ailleurs, que la principale difficulté de celui-ci concerne la construction d'une représentation d'un problème de transformation d'états relatifs dont la question porte sur la transformation et non sur le traitement d'une structure catégorielle.

Analyse des conduites du sujet 21

A. Problème de comparaison d'états relatifs avec structure catégorielle

problème soumis:

*Jean-François et David vendent des arbres. Ils possèdent chacun une pépinière. Il leur arrive parfois de faire des échanges.
Jean-François doit 154 érables à David mais David doit 169 sapins à Jean-François. Combien d'arbres David doit-il de plus?*

procédure de résolution utilisée:

aucune

réponse: il doit 169 pas plus que ça

Calcul numérique

opération utilisée: aucune

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *j'ai pensé à faire 1 centaine, 6 dizaines et 9 unités pour faire 169*
- *il ne lui en donne pas plus parce qu'il faut qu'il en donne 169*
- *j'ai écrit des sapins parce que David doit 169 sapins à Jean-François*
- *les mots qui m'ont aidé: David doit 169*
- *si je ne l'avais pas lu: je n'aurais pas su combien il en devait de plus*

problème formulé:

Claude et Renée vont à l'épicerie. Il achète un sac de bananes de 10. Combien y a-t-il de sacs en tout?

Cet élève n'a pu se construire une représentation du problème qui lui permette de s'engager dans un calcul numérique. Selon lui, la réponse est fournie dans le problème. En effet, les états relatifs sont interprétés comme des transformations. Ainsi, "David doit 169 sapins" est transformée ainsi: "Combien d'arbres David donne-t-il de plus?". Aucune relation entre les données du problème ne peut donc être extraite, c'est du moins le sens du commentaire de l'élève: *"il ne lui en donne pas plus parce qu'il faut qu'il en donne 169"*. Aucune identification de relations parties-tout n'est effectuée. Toutefois, puisque le sujet fournit une réponse qui le satisfait, on peut affirmer qu'il y a construction d'une représentation du problème et que, par conséquent, le sujet n'est pas dans une situation d'impasse.

Le problème formulé par le sujet conforte l'analyse précédente. Le problème ne comporte qu'une donnée numérique (*achète un sac de bananes de 10*) qui se présente sous la forme d'une transformation; la question se rapportant évidemment à cette donnée. Aucune structure parties-tout sur le plan numérique ou sur le plan catégorielle n'est élaborée. Il semble donc que cet élève a échappé à toute construction d'une représentation qui convient à un problème additif.

B. Problème de transformation d'états relatifs avec structure catégorielle**problème soumis:**

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les instruments de musique miniatures. Ils font souvent des échanges entre eux. Julien avait 167 tambours à Julie. Il lui emprunte aussi des flûtes et il doit maintenant 189 instruments de musique à Julie. Combien de flûtes Julien a-t-il empruntées à Julie?

procédure de résolution utilisée:*aucune**réponse: On ne le sait pas.***Calcul numérique**

opération utilisée: aucune

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *on ne le sait pas parce qu'ils ne disent pas combien il a emprunté*
- *il aurait fallu qu'ils disent combien il en a pris*

problème formulé:

Renée et Maxime sont échangés(sic) des instruments de musique. Il en doit 168 à Renée. Renée en doit 168 à Maxime. Quel instrument a-t-elle donné à Maxime?

Selon l'élève, les données du problème sont insuffisantes pour répondre adéquatement à la question: "*on ne le sait pas parce qu'ils ne disent pas combien il a emprunté*". Ce commentaire qui fait office de solution montre qu'aucune relation entre les données n'est effectuée; les données sont, pour le sujet, indépendantes les unes des autres, comme étanches les unes par rapport aux autres. Elles se juxtaposent et ne peuvent s'intégrer dans un réseau de relations. Toutefois, le sujet est satisfait de sa réponse comme s'il avait réussi à identifier le piège que pose ce problème.

Le sujet n'identifie ni le tout, ni les parties qui le composent; la structure catégorielle ne lui est d'ailleurs d'aucun support pour établir ces relations. En fait, il semble même que les termes catégoriels nuisent à la construction d'une représentation adéquate du problème. Il est possible que les instruments de musique soient associés à la catégorie surordonnée qui englobe bien d'autres exemplaires que seuls les flûtes et les tambours. On ne pourrait donc, du point de vue du sujet, identifier le nombre de flûtes empruntées puisque les 189 instruments

de musique ne correspondent pas exclusivement aux flûtes et aux tambours. D'ailleurs, le problème, tel que formulé, ne spécifie pas que, seules, des flûtes ont été empruntées.

Les verbalisations très limitées du sujet en cours de résolution ne fournissent aucun indice sur l'élaboration d'une représentation qui prenne en compte la chronologie des événements, laquelle peut favoriser l'activation ou la construction d'un schéma de type transformation d'états relatifs (ou à tout le moins de transformation d'états). La difficulté à interpréter les états relatifs (doit et devait) est sans doute un obstacle pour le sujet à l'élaboration d'un modèle de la situation. Il aurait été intéressant de présenter à ce sujet une variété de problèmes de transformation d'états avec et sans structure catégorielle pour mieux identifier les difficultés que rencontre ce sujet dans le calcul relationnel du problème soumis.

Le problème formulé par le sujet comporte deux états relatifs sans que ne soit précisée leur relation. La question telle que formulée indique que les états relatifs (doit) sont considérés comme des transformations (*combien... a-t-elle donné*). Bien que précise, cette question est tout à fait incohérente avec les données du problème et ne porte pas sur les données numériques présentées dans l'énoncé. En fait c'est un problème à donnée manquante et, de ce fait, il est "semblable" à celui que le sujet a résolu.

Analyse des conduites du sujet 35

A. Problème de comparaison d'états relatifs sans structure catégorielle

problème soumis:

Sarah et Éloïse font une collection d'autocollants. Elles font souvent des échanges pendant les récréations à l'école.

Sarah doit 154 autocollants à Éloïse mais Éloïse doit 169 autocollants à Sarah. Combien d'autocollants Éloïse doit-elle de plus?

procédure de résolution:

$$169 - 154 = 15$$

réponse: 15 autocollants

Calcul numérique**Verbalisation sur le calcul relationnel**

opération utilisée: soustraction

- *j'ai lu le problème*
- *je relis, je regarde si j'ai bien fait la soustraction*
- *j'ai fait des images: pour les autocollants, j'ai fait des paquets dans ma tête (des centaines, des dizaines, des unités)*
- *j'ai regardé où est la question: on me demande combien "de plus", je fais une soustraction*
- *avec l'expression "de plus", des fois on fait une soustraction, des fois on fait une addition*
- *dans ce cas, c'est une soustraction*
- *je ne peux pas te dire quand on fait une addition, mais je sais que ça peut arriver*

problème formulé:

Mathieu a 110 autos. Mais Nicolas en a 170. Combien Nicolas en a-t-il de plus?

Les commentaires formulés par le sujet fournissent des informations précieuses sur le calcul relationnel effectué: "avec l'expression "de plus", des fois on fait une soustraction, des fois on fait une addition. Dans ce cas, c'est une soustraction; je ne peux pas te dire quand on fait une addition, mais je sais que ça peut arriver". Ces propos expriment clairement que la signification accordée à cette expression n'est pas dépendante des mots (Vergnaud, 1990) mais elle se construit sur la base des relations qu'entretiennent les données du problème. Le sujet a, sans doute, effectué les opérations de pensée qui permettent d'identifier les relations numériques parties-tout de ce problème.

La structure du problème formulé est de type comparaison de mesures. La situation d'échange, de dettes est donc inexistante. Dépouillées de ce contexte, les données sont, toutefois, précises et la question est cohérente avec les données du problème. De plus, on peut souligner le juste emploi du pronom "en" qui évite une redondance dans la formulation, ce qui illustre la maîtrise du sujet dans le traitement des relations sémantiques du problème.

B. Problème de transformation d'états relatifs sans structure catégorielle

problème soumis:

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les timbres. Ils font souvent des échanges entre eux.

Julien devait 186 timbres à Julie. Julien remet des timbres et il ne doit plus alors que 145 timbres à Julie. Combien Julien a-t-il remis de timbres à Julie?

procédure de résolution:

$$186 - 145 = 41$$

réponse: 41 timbres

Calcul numérique

opération utilisée: soustraction

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *j'ai lu le texte, j'ai regardé pour voir s'il y a des mots que je ne connais pas...*
- *je me suis demandé s'il y avait une question*
- *je me demande si je dois faire une soustraction, une addition ou une multiplication en lisant*
- *« remis » quand on remet à quelqu'un on lui donne - nous ça nous enlève*
- *pour vérifier: je relis, je recompte, si j'ai le droit, je regarde dans un cahier*

problème formulé:

*Marie-Lou doit 146 billes à Maxime. Marie-Lou lui en a déjà donné 120.
Combien lui en reste-t-elle (sic) à donner à Maxime?*

Le calcul numérique effectué par le sujet est pertinent. Toutefois, ses verbalisations nous renseignent peu sur les opérations de pensée qui ont présidé à la résolution du problème. Seul le commentaire sur le verbe "remis" laisse supposer que les états relatifs ont été "assimilés" à des états par l'élève.

Le sujet ne réussit pas dans la formulation du problème à énoncer deux relations statiques (ou deux états relatifs) clairement. Si la première donnée correspond sans équivoque à un état relatif (*doit 146*), tandis qu'une seconde donnée correspond à une transformation (*en a déjà donné 120*), la question qui porte sur l'état final est formulée en termes de transformation (*"lui en reste-t-il à donner"*), c'est-à-dire en termes dynamiques et non statiques. Toutefois, la question pourrait être facilement traduite pour exprimer un état relatif (*combien lui doit-il encore?*) sans en altérer le sens. La structure est donc partiellement respectée (transformation d'états relatifs) puisque la question porte sur l'état final et non sur la transformation. Si une succession de représentations a jalonné le processus de formulation du problème, on peut comprendre qu'il est plus aisé de poser une question sur le dernier événement (état final) de la situation décrite dans le problème. En effet, une représentation claire, a priori, de la situation favorise, sans doute, la rédaction d'un énoncé qui permette une question cohérente sur la transformation. L'énoncé doit révéler des informations, en "cacher" d'autres pour qu'une question sur la transformation soit formulée et que le problème soit soluble; ce qui est peu compatible avec l'hypothèse selon laquelle il y a en cours de résolution, une construction dynamique et évolutive de la représentation. Il est aussi possible que la charge cognitive qu'exige le respect des différentes contraintes de formulation soit trop

importante pour que l'élève énonce des données en considérant simultanément ce sur quoi va porter la question.

La chronologie des événements décrits dans le problème formulé par l'enfant est un peu ambiguë; le temps des verbes (pour les données du problème) crée cette confusion. Est-ce que la transformation précède (puisque'elle est décrite au passé et que l'état est décrit au présent) ou succède (selon le sens attribué à l'énoncé) la première formulation? L'examen de la question nous permet de lever cette ambiguïté. Toutefois, le problème, tel que formulé, rend compte de la préoccupation du sujet à respecter de multiples contraintes: ordre chronologique des événements, relations sémantiques (transformation d'états relatifs), taille des données numériques semblables à celle du problème soumis etc. La rédaction du problème a, sans doute, été l'objet d'adaptations diverses pour tenir compte de ces contraintes, ce qui a créé une imprécision dans la chronologie des événements de la situation.

Les commentaires du sujet sur les deux problèmes à résoudre suscitent quelques interrogations quant à ce que nous nommons "l'enseignement d'algorithmes de résolution". Certaines verbalisations du sujet ressemblent à des formules apprises, qui ne rendent aucunement compte du réel travail effectué par le sujet (*pour vérifier: je relis, je recompte, si j'ai le droit, je regarde dans un cahier*) et laissent supposer qu'elles sont la trace d'un enseignement de "stratégies" de résolution de problèmes. Pour Conne (1985), c'est l'interprétation de la situation "d'élève-interrogé-sur-un-problème-d'arithmétique".

Analyse des conduites du sujet 33

A. Problème de comparaison d'états relatifs sans structure catégorielle

problème soumis:

Marie-Élaine et Roseline font une collection d'autocollants. Elles font souvent des échanges pendant les récréations à l'école.

Marie-Élaine doit 178 autocollants à Roseline mais Roseline doit 167 autocollants à Marie-Élaine. Combien d'autocollants Roseline doit-elle de moins?

procédure utilisée:

$$178 - 167 = 11$$

réponse: 11 autocollants

Calcul numérique

Verbalisation sur le calcul relationnel

opération utilisée: soustraction

- *j'ai lu et j'ai fait comme l'autre parce que j'utilise la même stratégie*
- *les mots « de moins » m'ont guidée*
- *j'ai pensé: « de moins »: c'est la différence: j'ai fait une soustraction*

problème formulé:

René et Milène collectionnent des feuilles. René doit 130 feuilles et Milène en doit 239. Combien en ont-elles en tout?

Le problème est résolu correctement sur le plan numérique. Cependant, on ne peut attribuer ce résultat à un calcul relationnel efficace, l'expression "de moins" n'ayant pas servi à établir la relation de comparaison. Le mot "moins" de cette expression suggère au sujet l'opération de soustraction. Les commentaires suivants en témoignent "*...de moins, c'est la différence; j'ai fait une soustraction*".

Les données que comporte le problème formulé par le sujet présentent de façon précise des états relatifs. Néanmoins, la question, formulée en termes de composition de mesures, est incohérente avec ces données. Ce qui suggère que bien que formulées en termes de relations statiques (doit), les données sont considérées et traitées par le sujet comme des états. Dans cette perspective, il n'est pas étonnant que les données du problème ne spécifient pas à qui chaque agent "doit les feuilles", précision apportées dans le problème soumis au sujet (par exemple: "*René doit 130 feuilles*" et non "*René doit 130 feuilles à Milène*"). Si du point de vue du sujet, les états relatifs sont transformés en états-mesures, la question est alors cohérente avec les données du problème.

B. Problème de transformation d'états relatifs sans structure catégorielle

problème soumis:

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les timbres. Ils font souvent des échanges entre eux.

Julien devait 167 timbres à Julie. Il lui emprunte encore des timbres et il doit maintenant 189 timbres à Julie. Combien de timbres Julien a-t-il empruntés à Julie?

procédure utilisée:

$$189 - 167 = 42$$

réponse: 42 timbres

Calcul numérique

opération utilisée: soustraction

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *je me suis dit: c'est quoi l'histoire*
- *je l'ai racontée dans mes mots dans ma tête*
- *y a-t-il une question*
- *ce qui m'a guidée, c'est la question*
- *« emprunter »: s'il l'avait pris, c'est pas pareil*
- *si j'ai besoin d'un pot et que je te l'emprunte, c'est pas pareil que (sic) si je le prends*

- *un emprunt, c'est comme une différence et quand tu cherches une différence, tu fais une soustraction*
- *quand tu emprunes, l'autre en a moins: tu fais une soustraction*

problème formulé:

*Voici deux enfants qui collectionnent des sortes de fleurs.
Un en avait 260 fleurs, un jour, il demande s'il pouvait en emprunter.
Maintenant il en doit 320. Combien de fleurs a-t-il empruntées?*

Le sujet effectue une soustraction, toutefois, il ne résout pas correctement le problème sur le plan numérique. Le calcul relationnel a permis une bonne identification des relations numériques parties-tout. Les commentaires du sujet sur sa démarche de résolution montrent, toutefois, qu'il ne peut exprimer facilement ces relations. Le choix de l'opération est justifié par la signification accordée au mot "emprunter": "*un emprunt c'est comme une différence et quand tu cherches une différence, tu fais une soustraction*" et encore "*quand tu emprunes, l'autre en a moins, tu fais une soustraction*". Le sujet éprouve de la difficulté à exprimer clairement une représentation de la situation. Comme nous l'avons noté pour d'autres sujets, cette difficulté semble liée à l'identification du registre. Notre hypothèse est que le sujet a du mal à expliquer, a posteriori, sa démarche. S'il est vrai que le mot "emprunter" est sans doute celui qui indique que l'on cherche la transformation, les significations qui lui sont accordées montrent que l'élève cherche à préciser la relation entre le mot "emprunter" et l'opération de soustraction, ce qui l'amène sur le terrain du registre: celui qui prête "en a moins" (diminution donc soustraction) mais aussi celui qui emprunte ("*ce n'est pas pareil si je le prends*") a une dette (diminution donc soustraction). Ces justifications montrent la difficulté à traiter les états relatifs.

La structure du problème formulé par l'enfant est de type transformation d'états relatifs dans lequel la transformation est recherchée. C'est donc un problème qui respecte la structure attendue. L'ordre chronologique des événements est bien rendu. Bien que les

commentaires de l'élève lors de la résolution du problème soulèvent des questions sur le calcul relationnel effectué, l'énoncé indique, toutefois, une bonne compréhension des relations entre les données.

Analyse des conduites du sujet 44

A. Problème de comparaison d'états relatifs sans structure catégorielle

problème soumis:

Sarah et Éloïse font une collection d'autocollants. Elles font souvent des échanges pendant les récréations à l'école.

Sarah doit 154 autocollants à Éloïse mais Éloïse doit 169 autocollants à Sarah. Combien d'autocollants Éloïse doit-elle de plus?

procédure utilisée:

$$169 - 154 = 15$$

réponse: 15 autocollants

Calcul numérique

opération utilisée: soustraction

Verbalisation sur le calcul relationnel

- *si j'avais fait une addition j'aurais eu plus haut*
- *elle en avait pas assez*
- *les nombres m'ont aidé, sinon je n'aurais pas su quoi faire*
- *les autocollants m'ont aidé, sinon je n'aurais pas su quoi faire*

problème formulé:

Antoni a 246 bonbons. Julie en a 184 bonbons. Combien de bonbons manque-t-il à Julie pour qu'elle en ait 246 bonbons.

Le calcul relationnel effectué par ce sujet dans la résolution de ce problème semble reposer sur un traitement efficace des relations sémantiques. En effet, le résultat numérique

est juste et accompagné de verbalisations qui mettent en évidence une bonne compréhension de la relation de comparaison entre les données du problème. Le commentaire suivant: "*si j'avais fait une addition, j'en aurais eu plus haut*" montre que le sujet cherche à identifier l'écart, la différence entre les données numériques et procède ainsi à un calcul soustractif. Les verbalisations montrent également que les états relatifs sont encore une fois traités comme des états. Ainsi, lorsque le sujet dit: "*elle en avait pas assez*", il exprime des états.

Le problème formulé présente des états-mesures et une question qui porte sur le complément d'une mesure, dans le but explicite d'égaliser une seconde mesure qui correspond au tout numérique. La question "*Combien de bonbons manque-t-il à Julie pour qu'elle en ait 246 bonbons*" marque bien les relations numériques parties-tout dans une formulation plus dynamique que celle qui caractérise les problèmes de comparaison. Les expressions relationnelles canoniques évitées, il en résulte une formulation qui s'apparente à un problème de composition de mesures dont on recherche l'une des mesures. Cette dernière structure correspond à une situation de tout à partie, situation semblable à celle d'un problème de comparaison. Telle que formulée, la question permet d'éviter de déplacer mentalement "la collection de Julie dans celle d'Antony" mais, elle permet de modifier la collection de Julie pour la rendre équipotente à celle d'Antony. Si l'on admet que la question peut se traduire ainsi sans en altérer le sens: *Que doit faire Julie pour en avoir autant qu'Antony*, c'est un problème de type égalisation qui apparaît dans la catégorisation de Riley, Greeno et Heller (1983). Fayol (1990) souligne d'ailleurs que ces problèmes

"ont un statut intermédiaire entre les problèmes de type comparaison de par le caractère "statique" des situations évoquées - et ceux de type changement - du fait de la transformation impliquée"

Fayol, 1990, p.152

De plus, il mentionne que la différenciation entre les problèmes de comparaison et d'égalisation n'est pas évidente. C'est, sans doute, un problème charnière à plusieurs points de

vue. On peut comprendre qu'une telle formulation rende compte de l'intention du sujet d'exprimer à la fois des états statiques et une relation de tout à partie. Formuler aussi précisément dans la question le tout numérique ne peut se faire sans avoir préalablement considéré "la collection de Julie comme une partie de celle d'Antony". C'est donc dans un cadre interprétatif (partiellement) différent (Conne, 1985), mais compatible avec le problème soumis, que le sujet a formulé le problème.

B. Problème de transformation d'états relatifs sans structure catégorielle

problème soumis:

Les jumeaux Julien et Julie collectionnent les timbres. Ils font souvent des échanges entre eux.

Julien devait 167 timbres à Julie. Il lui emprunte encore des timbres et il doit maintenant 189 timbres à Julie. Combien de timbres Julien a-t-il empruntés à Julie?

procédure de résolution:

$$189 - 167 = 22$$

réponse: 22 timbres

Calcul numérique

Verbalisation sur le calcul relationnel

opération utilisée: soustraction

- *j'ai fait 189 moins 167*
- *ils n'écrivent pas combien il en a empruntés*
- *« devait »: il faut qu'il donne*
- *« emprunte »: si ça n'avait pas été écrit peut-être que ça aurait été « donne »*
- *si j'avais fait une addition, ça aurait donné plus que ce qu'il a*

problème formulé:

Véronique veut acheter 4 poupées à 60 dollars. Elle a juste 27 dollars. Combien lui manque-t-il de dollars?

Les verbalisations du sujet sont intéressantes car elles rendent compte d'une reconstruction dynamique de la représentation du problème en cours de résolution. En effet, le sujet dit "*devait, il faut qu'il donne*" et aussi "*emprunte, si ça n'avait pas été écrit, peut-être que ça aurait été donne*" ce qui suggère une première représentation qui fait appel à un schéma de problèmes de type transformation d'états relatifs avec un opérateur positif. Dans ce cas, les schémas de connaissances activés se rapportent à une situation qui porte sur une dette que l'on diminue par une remise. Toutefois, cette représentation est abandonnée au profit d'une représentation pertinente aux données du problème. Le problème est bien résolu sur le plan numérique.

Cependant, le problème formulé ne respecte pas la structure attendue. Il s'agit d'une structure mixte qui allie un problème additif d'égalisation (comme pour le problème formulé précédemment) et un problème multiplicatif. La question qui prend la forme d'un problème d'égalisation est, toutefois, cohérente avec les données énoncées à l'aide d'un schéma de type isomorphisme de mesures. Il semble que la recherche d'un complément soit l'élément prégnant de la représentation qu'a construite le sujet, du problème. La structure multiplicative est ici, d'une certaine manière, accessoire à la structure additive et ne calque pas, selon nous, le calcul relationnel effectué lors de la résolution du problème.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

La résolution de problèmes additifs est soumise à l'influence de plusieurs facteurs. La compréhension d'un énoncé de problème nécessite le traitement de l'information dont il est constitué pour permettre au solutionneur de se construire une représentation du problème à partir de laquelle il pourra induire des procédures de résolution. Ainsi, certains facteurs relèvent des connaissances déclaratives du solutionneur, comme ses connaissances sur le monde pour traiter les données relatives aux contenus évoqués dans l'énoncé de problème. D'autres facteurs tiennent aux connaissances relatives aux mathématiques, parmi lesquelles un certain nombre sont des connaissances procédurales, qui permettent d'établir des relations entre les données du problème et de réaliser les procédures de résolution nécessaires.

Le but de notre recherche est justement d'étudier l'effet des variables suivantes - structure de connaissances, catégorie de problèmes et opérateur sur la résolution de problèmes additifs. En effet, la résolution d'un problème additif exige, de la part du solutionneur, la construction d'une représentation adéquate du problème à résoudre. Pour ce faire, celui-ci doit mettre en oeuvre ses connaissances relatives aux contenus évoqués dans la situation afin d'établir des relations entre les données de l'énoncé du problème. La capacité du solutionneur à effectuer adéquatement ces opérations cognitives influence ses performances lors de la résolution.

A. Performances de résolution et inclusion des classes

Les résultats rapportés précédemment sont sans équivoque quant au fait que, pour les deux groupes de sujets, il n'y a pas de concordance entre leurs performances aux épreuves d'inclusion piagésiennes et leurs performances aux problèmes de comparaison d'états relatifs

et de transformation d'états relatifs, qui sollicitent pourtant des mises en relation de type partie-tout.

On peut donc supposer que le fait de réussir ou pas les épreuves d'inclusion ne semblent pas reliées aux procédures utilisées par nos sujets pour résoudre les problèmes de comparaison d'états relatifs et de transformation d'états relatifs.

On a déjà dit que des variables perceptives et linguistiques peuvent influencer les performances des élèves aux épreuves d'inclusion des classes (Bideaud, 1976, 1988; Bideaud et Houdé, 1989), ce qui, en particulier pour les premières, ne peut pas se produire dans les tâches expérimentales proposées.

À la suite de Houdé, on peut considérer que les épreuves classiques d'inclusion des classes font appel à des connaissances déclaratives, essentiellement symboliques et reliées entre elles par une relation d'inclusion que l'on peut qualifier de "statique" (Houdé, 1992), tandis que les groupements additifs nécessaires à la résolution des problèmes proposés exigent que le sujet effectue une opération sur les nombres.

Deux théories s'opposent sur le rôle du langage dans le développement cognitif et intellectuel. Les tenants de la conception piagétienne considèrent le développement du langage comme consécutif à la réalisation d'actions intériorisées ou opérations qui président à l'émergence du symbole. Par contre, pour des auteurs comme Vygotski (1962) et Nelson (1985), le langage naît à l'intérieur de situations fonctionnelles de communication antérieures à la pensée symbolique, dont il contribue à favoriser l'apparition, en même temps qu'il facilite l'intériorisation des actions. Cette approche considère que le langage permet l'émergence des opérations de pensée.

Ainsi, si nous examinons selon l'approche piagétienne les résultats mentionnés précédemment, il y aurait une contradiction entre les résultats obtenus par les sujets aux épreuves d'inclusion d'une part, et à la résolution des problèmes soumis, d'autre part. En effet, les opérations de pensée nécessaires, selon Piaget, à la réussite des épreuves d'inclusion, devraient se retrouver dans la résolution des problèmes soumis, ce qui ne semble pas être le cas. Par contre, si nous considérons que ce sont des connaissances essentiellement déclaratives qui dirigent le traitement des épreuves d'inclusion, cette contradiction n'existerait pas, puisqu'alors ces connaissances, d'origine essentiellement langagière, ne supposent pas nécessairement la mise en oeuvre préalable d'opérations.

Toutefois, l'épreuve expérimentale soumise aux sujets de la recherche exige non seulement la mise à contribution de ses connaissances déclaratives, mais aussi la réalisation d'opérations qui impliquent un rapport au savoir mathématique, ce qui, alors, expliquerait que les résultats obtenus ne fassent pas ressortir de liens entre les deux types de tâches.

Ajoutons que les verbalisations des sujets montrent qu'ils prennent une distance par rapport aux contenus déclaratifs des énoncés de problèmes pour opérer sur les données numériques. Elles montrent aussi leur capacité à effectuer des opérations de pensée qui permettent l'identification d'une relation de comparaison ou de transformation entre deux états relatifs qu'ils réussissent ou non les épreuves d'inclusion des classes.

Cette observation rejoint les plus récents travaux de Piaget (Piaget et Garcia, 1987, cités dans Houdé et Miéville, 1993) sur la catégorisation, où l'accent est mis non plus sur les groupement additifs des classes mais sur une activité de mise en relation des propriétés surordonnées et subordonnées. Cette précision reconnaît que l'enfant

"d'âge préscolaire possède et applique des fragments de logique bien avant de réussir les épreuves classiques de

logiques opératoire (notamment l'épreuve de quantification de l'inclusion)".

(Houdé et Miéville, 1993, p.116)

On peut penser que ces "fragments de logique" mentionnés par Piaget ressortissent justement aux capacités langagières du sujet, qui lui permettent de distinguer et de comparer la catégorie et l'exemplaire.

B. Résolution des problèmes et structure de l'énoncé

Problèmes de comparaison d'états relatifs

Rappelons que la première hypothèse formulée dans notre recherche concerne la variable structure de connaissances. Nous nous attendions, d'une part, à ce que les sujets qui ont à résoudre des problèmes de la catégorie "comparaison d'états relatifs" faisant appel à une structure catégorielle obtiennent des résultats significativement inférieurs aux résultats obtenus par ceux qui traitent un problème de "comparaison d'états relatifs" dont l'énoncé ne fait pas appel à une structure catégorielle et, ce, quel que soit l'opérateur mis en cause. La recherche n'a pas vérifié cette hypothèse.

Cependant, les résultats des sujets ayant traité des énoncés de problèmes de comparaison d'états relatifs ne comportant pas de structure catégorielle, montrent qu'ils réussissent mieux à résoudre les problèmes proposés, même si cette différence n'est pas statistiquement significative. Ainsi, l'analyse statistique révèle une moyenne de 1,09 pour les résultats aux problèmes de comparaison d'états relatifs avec structure catégorielle et comportant un opérateur positif, comparativement à 1,41 pour ceux qui ne comportent pas de structure catégorielle. En effet, l'analyse des conduites des sujets montrent que ceux qui ont résolu plus facilement et plus rapidement les énoncés de problèmes de composition d'états

relatifs comportant une structure catégorielle, sont ceux qui n'en ont pas tenu compte, ce qui est rapporté par le sujet 18: "je ne me suis pas occupé des sapins, des érables, des arbres".

Cela semble bien montrer que les opérations cognitives effectuées par les sujets de ce groupe sont moins complexes et qu'ils peuvent mobiliser toute leur attention sur la mise en relation des données du problème étant donné que la situation à traiter ne met en cause qu'un seul contenu.

De plus, l'effet de la structure catégorielle peut varier selon l'opérateur considéré. En effet, les problèmes comportant l'expression relationnelle "de plus" sont toujours moins bien réussis que ceux qui font appel à l'expression "de moins", que l'énoncé sollicite ou non une structure catégorielle. En ce qui concerne les problèmes comportant l'expression relationnelle "de moins", ils sont toujours mieux réussis lorsque l'énoncé ne fait pas appel à une structure catégorielle.

Soulignons que la résolution des problèmes de comparaison d'états relatifs avec structure catégorielle a pu causer une difficulté particulière aux sujets ayant à résoudre cette catégorie de problèmes. En effet, l'organisation des données dans les problèmes proposés ne rendait pas évidente la partie et le tout numérique, et par conséquent, le sujet ne peut s'appuyer sur la structure catégorielle pour résoudre le problème.

La réussite des sujets à la résolution de ces problèmes tiendrait au fait qu'ils ont traité les données numériques du problème en faisant abstraction des contenus catégoriels, ce qui ressort aussi des verbalisations des sujets auprès desquels nous avons mené une analyse des conduites de résolution. Ainsi, pour l'exemple du sujet 18 rapporté précédemment, la comparaison de deux états relatifs portant respectivement sur des érables et des sapins

conduit à considérer la mesure (exemple: 169) de la collection des sapins comme le tout numérique.

Problèmes de transformation d'états relatifs

D'autre part, selon notre seconde hypothèse, les sujets ayant à traiter un énoncé de problème de transformation d'états relatifs faisant appel à une structure catégorielle activée à partir du prototype de la catégorie devaient obtenir des résultats supérieurs à ceux qui traitent un problème de transformation d'états relatifs dont l'énoncé ne fait pas appel à une structure catégorielle, et ce, quel que soit l'opérateur mis en cause. Cette hypothèse n'a pas non plus été vérifiée. En effet, les données recueillies montrent que, comme pour les problèmes de comparaison d'états relatifs, la présence de prototypes dans les énoncés de problème n'a pas facilité la mise en relation des données et, de ce fait, n'a pas non plus facilité la résolution.

Nous nous attendions à ce que la présence des prototypes dans les énoncés de ces problèmes permettent "un accès rapide aux connaissances qui lui sont associées" comme l'a montré une recherche menée par Ziarko (1992) et, par le fait même, qu'ils facilitent la mise en relation des données du problème. Il semble, au contraire, que les énoncés de problèmes comprenant une structure de connaissances catégorielles alourdissent la charge cognitive nécessaire à la résolution du problème par le sujet et que celui-ci n'a pas utilisé ses connaissances sur le monde pour faire un lien avec la structure de l'énoncé.

L'analyse montre également que les sujets qui ont tenté de traiter à la fois les données de la structure catégorielle et les données numériques ont eu plus de difficulté à effectuer la mise en relation des données et à résoudre le problème, ce que verbalise le sujet 8: "*ça mêle: sapins, érables, arbres, parce qu'à la fin tu ne sais pas si ce sont des sapins... ou des érables ou des arbres*". Il apparaît donc que les sujets ne peuvent en même temps considérer la mise en relation des contenus catégoriels de l'énoncé et la mise en relation des données des problèmes, ce qui les aurait conduits à faire le lien entre la relation inclusive des contenus catégoriels et les données numériques du problème et qui n'a pu être vérifié par les résultats de la recherche.

C. Résolution des problèmes et catégorie de problèmes

Les données recueillies montrent également que, contrairement à notre seconde hypothèse, les performances obtenues à la résolution des problèmes de transformation d'états relatifs ne sont pas toujours supérieures à celles des problèmes de comparaison d'états relatifs.

Ces résultats vont à l'encontre de ceux que nous avons précédemment rapportés, suite à l'examen des résultats d'une recherche rapportée par de Fayol (1990) effectuée auprès de sujets de maternelle, 1^e, 2^e et 3^e année et portant, entre autres, sur la résolution de problèmes de transformation. Toutefois, dans cette étude, les problèmes soumis portaient sur des états et non sur des états relatifs et la taille des données numériques n'excédait pas "8". Une recherche de Comiti et al. (1980) rapportée par Vergnaud (1991) montre que certaines conceptions du nombre acquises pour des petits nombres ne sont pas utilisées pour des nombres plus grands.

Par ailleurs, les études menées par Conne (1979, 1984) nous permettent de mieux comprendre comment se conçoivent et se construisent les transformations. Selon lui, cette construction s'élabore à un premier niveau en terme d'identification d'un registre de "gain" ou de "perte". Puis, la transformation indique une opération à effectuer. Au troisième niveau, apparaît une conception différente de la transformation. La représentation de cette dernière est alors réalisée par le biais des états, comme dans l'exemple suivant: "Bertrand, il **avait** 7 billes", Brun (1990). Enfin, au dernier niveau, le "traitement simultané des signes et des valeurs absolues" (Vergnaud, 1991; exemple: **perd 5 billes** correspond à (-5)) permet que le solutionneur représente une transformation par l'intermédiaire des entiers relatifs.

Nous avons observé que les sujets de notre recherche éprouvent de la difficulté à traiter les états relatifs et qu'ils les traitent comme des états, ce qu'illustrent bien les verbalisations des sujets 18, 35 et 44. Cette observation rejoint les résultats d'une recherche de Conne (1984) qui a soumis des problèmes de transformation et de composition de transformations d'états à des sujets de 8 à 10 ans. Il a alors pu observer que, dans les deux

cas, les sujets sont à la recherche d'un registre de "gain" ou de "perte" leur permettant de traiter dans \mathbb{N} (nombres naturels) les données du problème, ce qui leur permet d'assimiler les données du problème à leurs propres cadres de pensée et de construire une représentation "calculable".

Il apparaît également que les problèmes de transformation d'états relatifs soumis aux sujets présentent un niveau de difficulté particulière, étant donné que la question posée par les énoncés porte sur la recherche de la transformation. Cela suppose donc que le solutionneur remonte dans l'ordre chronologique des événements évoqués dans l'énoncé, puisque d'un point de vue temporel, il est à la recherche d'une transformation intermédiaire entre l'état initial et l'état final. Cela l'oblige, par le fait même, à bien identifier le tout et la partie, comparativement à un problème dont la question porte sur l'état final (le résultat d'une opération connue), le conduisant à traiter des données connues pour identifier le tout (Conne, 1984).

On peut ainsi expliquer l'absence de différence significative entre les performances de résolution des problèmes de transformation d'états relatifs et celles des problèmes de comparaison d'états relatifs par le fait que, d'une part, la question de l'énoncé porte justement sur la transformation dont nous venons d'exposer les difficultés de sa construction par les jeunes sujets, et, d'autre part, que les données correspondent à des états relatifs. Cette dernière caractéristique rend l'identification du registre (gain ou perte) plus difficile pour le sujet.

De plus, les problèmes de transformation d'états relatifs avec une structure catégorielle comporte une difficulté supplémentaire, puisque les contenus évoqués dans l'énoncé sont variés (exemple: des érables et des sapins) et que le sujet doit, d'abord, remonter jusqu'à la classe surordonnée (exemple: arbres) pour se questionner sur la

pertinence de considérer comme équivalents, des contenus différents, ce que les situations scolaires typiques ne l'amènent pas à faire. Ensuite, il doit effectuer le calcul relationnel nécessaire à la construction de la représentation du problème. Nous croyons que la combinaison de ces facteurs a influencé la résolution et considérablement réduit l'écart entre les performances auxquelles nous nous attendions.

D. Performances de résolution, catégorie de problèmes et opérateur

Les résultats de la recherche confirment l'effet d'interaction des variables catégorie de problèmes et opérateur. Rappelons que nous nous attendions à ce que les performances obtenues lors de la résolution des problèmes de comparaison d'états relatifs comportant un opérateur positif soient inférieures à celles obtenues pour les problèmes sollicitant un opérateur négatif. Il semble que pour effectuer la mise en relation des données du problème, les sujets sont à la recherche de mots indicateurs (ce que Fischer, 1993) nomme: opérateur sémantique) leur permettant de résoudre les problèmes. L'analyse des protocoles montre que, les résultats numériques corrects obtenus suite à des procédures de résolution, ne rendent pas nécessairement compte des opérations de pensée pertinentes pour traiter les relations des problèmes de comparaison d'états relatifs sollicitant un opérateur négatif. En effet, les verbalisations des sujets montrent que, dans certains cas, la procédure de résolution effectuée, notamment une soustraction, ne repose pas sur un calcul relationnel pertinent mais sur l'indice sémantique de l'expression "de moins" qui suggère cette opération arithmétique, comme le rapporte le sujet 8: *"de moins: je fais une soustraction"*. Par contre, lorsque les problèmes de comparaison d'états relatifs comportait l'expression relationnelle "de plus" et que le sujet a effectué une addition, nous pouvons mieux vérifier l'effet de l'indicateur sémantique sur la procédure de résolution effectuée, la présence de cet indicateur le conduisant à la recherche d'un tout.

Nous pouvons constater que la non-concordance de l'opérateur sémantique (de plus) et de l'opération mathématique (soustraction) cause des difficultés aux sujets, ce qui se traduit par les résultats obtenus avec l'opérateur "de plus" inférieurs à ceux qui correspondent à l'opérateur "de moins". De plus, les verbalisations des sujets montrent qu'il arrive que ceux-ci effectuent une mise en relation simplifiée qui débouche sur la composition de deux états relatifs ou de deux mesures: "de plus" devient alors "plus".

Les résultats recueillis sont en accord avec ceux de recherches précédemment mentionnées (Donaldson, 1978, De Corte et Verschaffel, 1987, Dellarosa-Cummins, 1988) qui montrent elles aussi que les jeunes solutionneurs éprouvent des difficultés avec les termes relationnels dans la résolution de problèmes additifs.

Les résultats obtenus lors de la résolution des problèmes de transformation d'états relatifs sollicitant un opérateur négatif, sont inférieurs à ceux qui correspondent à l'utilisation d'un opérateur positif. Ils confirment notre hypothèse. Il semble bien que les sujets ont éprouvé de la difficulté à interpréter la situation d'emprunt. Notamment, les verbalisations montrent que les sujets sont à la recherche d'actions associées à la situation pouvant les conduire à une opération mathématique à effectuer, comme le mentionne le sujet numéro 18: *un qui prend* (que l'on peut interpréter comme conduisant à une addition) et *un qui donne* (que l'on peut interpréter conduisant à une soustraction). Ainsi, les problèmes de transformation d'états relatifs sollicitant un opérateur négatif rendent difficile l'identification du registre par le sujet, puisque la situation peut être interprétée, soit en termes de gain pour celui qui emprunte (état), soit comme la diminution d'un avoir pour celui qui prête (état) plutôt que comme l'augmentation d'une dette (état relatif) pour l'emprunteur.

CONCLUSION

La recherche que nous venons de présenter avait pour objectif d'étudier l'effet des variables structure de connaissances, catégorie de problèmes et opérateur sur la résolution des problèmes de comparaison d'états relatifs et de transformation d'états relatifs chez les élèves de 3e année du primaire. L'originalité de la recherche repose d'abord, sur le fait qu'ont été étudiés conjointement les effets de deux structures cognitives dont l'une est déclarative et l'autre opératoire ou procédurale; de plus, la mobilisation de chacune d'elles met en cause une relation de partie à tout sur la résolution de problèmes d'états relatifs qui ont, jusqu'à présent, fait l'objet de peu de recherches.

L'analyse statistique des résultats obtenus par l'ensemble des sujets et une analyse fine des conduites verbalisées par certains sujets au cours de la résolution des problèmes nous permettent d'affirmer que l'utilisation des prototypes relatifs aux catégories d'objets mis en cause dans les énoncés de problèmes additifs de type comparaison d'états relatifs et transformation d'états relatifs n'est pas un facteur facilitant la mise en relation des données pour les élèves de 3e année du primaire, qu'ils aient ou non réussi les épreuves piagétienne classiques d'inclusion de classes. Toutefois, l'analyse des conduites de quelques sujets comparée aux résultats obtenus aux épreuves piagétienne d'inclusion de classes montre que, parmi ceux-ci, les sujets qui ont résolu plus facilement et plus rapidement les problèmes soumis identifient aisément les relations parties-tout, relations qui conviennent à la représentation d'un problème additif.

Les résultats montrent que les performances de résolution des problèmes de transformation d'états relatifs ne sont pas significativement supérieures à celles des problèmes de comparaison d'états relatifs. Ces résultats, appuyés par les verbalisations des sujets montrent la difficulté pour des élèves de 8-9 ans à effectuer le calcul relationnel avec cette catégorie de problèmes. En effet, il apparaît que les sujets de notre recherche procèdent difficilement à l'identification d'un registre de "gain" ou de "perte" débouchant sur la mise en relation des données. De ce fait, nos résultats confirment l'importance revêtue par les travaux

de Conne (1984) qui ont permis d'éclairer le rôle tenu par l'identification du registre dans la mise en relation des données du problème.

De plus, dans notre recherche, les états relatifs sont considérés par les sujets comme des états, ce qui leur permet, certes, de traiter les données du problème dans leurs cadres de pensée, mais ce qui caractérise aussi l'évolution de la formation du concept de nombre chez l'enfant qui passe "par une certaine conceptualisation des nombres négatifs et positifs" (Vergnaud, 1991).

La résolution de certains problèmes de comparaisons d'états relatifs a pu, dans certains cas, être facilitée par des indicateurs sémantiques (exemple: de moins) ne conduisant peut-être pas à la mise en relation des données, mais suggérant, du moins, le choix d'une opération à effectuer. Cependant, la recherche met aussi en évidence l'effet d'interaction de la catégorie de problème et de l'opérateur. Ainsi, pour les problèmes de comparaison d'états relatifs sollicitant un opérateur positif, la non-concordance de l'indicateur sémantique (de plus) et de l'opération mathématique (soustraction) pose problème aux sujets. Par ailleurs, les problèmes de transformation d'états relatifs sollicitant un opérateur négatif sont moins bien résolus. Il semble que l'interprétation de la situation d'emprunt, telle que proposée dans les problèmes expérimentaux, ait rendu difficile la mise en relation des données. En effet, la situation peut évoquer un registre d'augmentation (*un qui prend*) ou de diminution (*un qui donne*). Par ailleurs, c'est aussi une situation de diminution pour celui qui emprunte dans la mesure où sa dette devient alors plus importante étant donnée la situation d'état relatif (dette) proposée par le problème. La mise en relation des données de cette catégorie de problèmes pourrait être facilitée par la mise à contribution de schémas de connaissances relatif au contexte rapporté dans l'énoncé, contexte que les sujets de la recherche ne maîtrisent pas encore.

Enfin, notre recherche montre que l'apprentissage du concept de nombre et la résolution de problèmes additifs par l'enfant sont étroitement liées. En effet, si nos sujets ne possèdent pas encore la compréhension des propriétés des nombres relatifs, leurs performances aux problèmes soumis montrent qu'ils peuvent traiter les situations pour lesquelles le concept de nombre relatif est pertinent. Pour contourner les difficultés auxquelles donnent lieu le calcul relationnel et numérique rattachés à ces situations, ils modifient le problème pour les adapter à leur cadre de pensée. Ainsi, plusieurs sujets, pour opérer dans \mathbb{N} , traitent les états relatifs comme des états, tout en maintenant la relation de transformation ou la relation de comparaison. D'autres sujets construisent une représentation du problème qui ne correspond plus du tout à la structure de base du problème. Pour eux, "la situation exposée dans l'énoncé se limitera à appliquer une opération sur les données en fonction de mots-déclencheurs" (Blanchet, 1992) comme "de plus, "de moins".

L'interprétation des résultats nous conduit à cerner certaines limites de la recherche effectuée et nous indique des avenues possibles de recherche. Ainsi, comme nous l'avons souligné précédemment les réponses des sujets lors de la résolution contiennent le résultat du calcul numérique et le terme catégoriel ou le contenu auquel se rapporte ce résultat. Si nous avons exigé que les réponses des sujets soient formulées par une phrase complète (exemple de réponse: *David doit 15 sapins de plus à Jean-François*) nous aurions pu mieux observer si les élèves ont traité les énoncés de problèmes qui portent sur des états ou sur des états relatifs. De même, nous aurions dû nous assurer que les sujets résolvent les problèmes qu'ils ont eux-mêmes formulés, de façon à ce que nous puissions conforter l'analyse de la formulation par celle de la résolution.

Enfin, comme nos résultats sont en contradiction avec ceux rapportés par Fayol (1990) en ce qui concerne la résolution, entre autres, des problèmes de transformation d'état, nous aurions pu soumettre à nos sujets deux problèmes relevant de la même catégorie (exemple: transformation d'états relatifs) mais variés du point de vue de la taille des données

(petits nombres / grands nombres). Ainsi, nous aurions pu vérifier dans quelle mesure le calcul numérique a influencé les performances de résolution du sujet.

Les résultats auxquels nous sommes parvenus nous laissent entrevoir que l'étude d'une seule catégorie de problèmes permettrait de mieux cerner le calcul relationnel réalisé par les sujets dans la résolution de problèmes d'états relatifs. Au calcul relationnel concernant la transformation, envisagé dans notre recherche, pourraient être ajoutés des problèmes dont l'énoncé comporterait une inconnue portant soit sur l'état initial ou l'état final, ce qui permettrait d'approfondir les connaissances sur la résolution de problèmes comportant des états relatifs.

À partir de l'ensemble des résultats obtenus et des analyses auxquelles ils ont donné lieu, nous pouvons conclure à l'importance de la prise en compte du calcul relationnel (nombre-état ou nombre-transformation) effectué par les élèves lors de la construction d'une représentation induisant des procédures de résolution.

La résolution de problèmes mathématiques qui fut, un temps, considérée comme un ensemble d'exercices à réaliser en vue de consolider des opérations mathématiques, se dirige actuellement vers l'enseignement explicite de stratégies de résolution dans lesquelles on demande à l'élève "des traces de sa démarche" qui servent à des fins évaluatives. Notre recherche montre, plutôt, toute l'importance que la didactique des mathématiques devrait accorder au calcul relationnel réalisé par l'élève et aux adaptations qu'il doit réaliser pour traiter dans ses "cadres de pensée" (Conne, 1984) les énoncés de problèmes. En effet, la représentation du problème construite par l'élève dépend de ses connaissances sur le monde et de la maîtrise exercée sur les activités cognitives qui lui permettent d'opérer sur le nombre.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BIDEAUD, J., MELJAC, C. et FISCHER, J-P. (éds.) (1991). *Les chemin du nombre*. Lille: Presses universitaires.
- BIDEAUD, J. et HOUDÉ, O. (1991). *Cognition et développement*. Berne: Peter Lang.
- BIDEAUD, J., HOUDÉ, O. ET PEDINIELLI, J-L. (1993). *L'homme en développement*. Paris: Presses universitaires de France.
- BILSKY, L.H. et JUDD, T. (1986). Sources of difficulty in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and non retarded individuals. *American Journal of Mental Deficiency*, 90(4), 395-402.
- BLANCHET, A. (1992). *L'invention de problèmes*. Lausanne: Centre Vaudois de Recherches Pédagogiques.
- BRUN, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives. *Math École*, 141, 3-14.
- BRUN, J. et CONNE, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, 3(90), 261-285.
- COLLINS, A. M. et QUILLIAN, M. R. (1969). Retrieval time semantic memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 8, 240-248.
- COMITI, C., BESSOT, A. et PARISELLE C. (1980). Analyse de comportements d'élèves du cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné. *Recherche en didactique des mathématiques*, 1(2), 171-217.
- CONNE, F. (1979). Pierre, Bertrand, Claude, Paul, Laurent, Michel et leurs billes. In J. Brun et F. Conne, *Approches en psychopédagogie des mathématiques*. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, cahier 12, 25-84.
- CONNE, F. (1984). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes arithmétique. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, 5(3), 269-332.
- CONNE, F. (1989). Points de repères pour l'analyse de protocoles. Annexe à l'article: Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques. « *petit x* », 20, 1-18.
- DE CORTE, E. et VERSCHAFFEL, L. (1987). The effet of semantic structure on first graders strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 363-381.
- DELLAROSA-CUMMINS, D., KINTSCH, W., REUSSER, K. et WEIMER, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- DOLLE, J-M. (1991). *Pour comprendre Jean Piaget*. Toulouse: Privat.

- DONALDSON, M. (1978). *Children's minds*. New York: Norton.
- DUBOIS, D. (1986). *La compréhension de phrases: représentations sémantiques et processus*. Thèse de doctorat, Université de Paris III.
- DURAND, C. et VERGNAUD, G. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de psychologie*, 36, 28-43.
- ESCARABAJAL, M-C. (1984). Compréhension et résolution de problèmes additifs. *Psychologie française*, 29(3/4), 247-252.
- ESCARABAJAL, M-C. (1988). Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques. *Revue française de pédagogie*, 82, 15-21.
- FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Suisse: Delachaux et Niestlé.
- FAYOL, M. (1991). Du nombre à son utilisation: la résolution de problèmes additifs. In J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (éds.), *Les chemin du nombre* (pp.259-270). Lille: Presses universitaires.
- FAYOL, M. et ADBI, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*, 1(1), 41-58.
- FISCHER, J-P. (1993). La résolution de problèmes arithmétiques verbaux. In ULP (éd.), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (pp.179-208). Strasbourg: IREM.
- FORTIN, C. et ROUSSEAU, R. (1992). *Psychologie cognitive une approche de traitement de l'information*. Québec: Presses de l'Université du Québec.
- FUSON, K. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (éds.), *Les chemin du nombre* (pp.159-179). Lille: Presses universitaires.
- GELMAN, R. et MECK, E. (1991). Premiers principes et conceptions du nombre. In J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (éds.), *Les chemin du nombre* (pp.211-234). Lille: Presses universitaires.
- GIROUX, J. et LEMOYNE, G. (1994). Coordination de connaissances sur la numération et les opérations chez des élèves de la 1^e année du primaire. Texte inédit.
- HEMEMWAY, K. (1981). *The role of perceived parts in categorization*. Thèse de doctorat, Université de Stanford.
- HOUDÉ, O. (1992). *Catégorisation et développement cognitif*. Paris: Presses universitaires de France.

- HOUDÉ, O. et MIÉVILLE, D. (1993). *Pensée logico-mathématiques*. Paris: Presses universitaires de France.
- KAMII, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne: Peter Lang.
- LE NY, J-F. (1975). *Langages, problèmes de sémantique psychologique*. Paris: Didier Larousse.
- LEMOYNE, G., GIROUX J. et BIRON D. (1990). Connaissances utilisées par des élèves de 8 à 12 ans dans la formulation de problèmes arithmétiques concrets. *I.S.P.A.*, 274-291.
- LINDSAY, P. et NORMAN, D. (1980). *Traitement de l'information et comportement humain*. Montréal: Éditions Études Vivantes.
- MARKMAN, E. (1973). The facilitation of part-whole comparisons by use of collection noun « family ». *Child Development*, 49, 837-840.
- MARKMAN, E. (1979). Classes and collections: conceptual organisation and numerical abilities. *Cognitive Psychology*, 11, 395-411.
- NELSON, K. (1985). *Making sense. The acquisition of sharing meaning*. New York: Academic Press.
- PIAGET, J. et SZEMINSKA, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Suisse: Delachaux et Niestlé.
- PIAGET, J. et INHELDER, B. (1959, 1972). *La genèse des structures logiques élémentaires*. Suisse: Delachaux et Niestlé.
- RICHARD, J-F. (1990). *Traité de psychologie cognitive 2*. Paris: Dunod.
- RILEY, M.S., GREENO, J.G. et HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (éd.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.
- RIPS, L.J., SHOBEN, E.J. et SMITH, E.E. (1973). Semantic distances and the verification of semantic relations. *Journal of Learning and Verbal Behavior*, 12, 1-20.
- ROSCH, E. (1973). On the internal structure of perceptual and semantic categories. In T.E. Moore (Ed), *Cognitive development and the acquisition of language*. New York: Academic Press.
- ROSCH, E. (1975a). Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General*, 104, 192-233.
- ROSCH, E. (1975b). Cognitive reference points. *Cognitive Psychology*, 7, 532-547.

- ROSCH, E. (1976). Classification d'objets du monde réel: origines et représentations dans la cognition. *Bulletin de psychologie, numéro spécial annuel: La mémoire sémantique*, 242-249.
- ROSCH, E. et MERVIS, C.B. (1975). Family resemblances: studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology*, 7, 573-605.
- ROSCH, E., MERVIS, C.B., GRAY, W.D., JOHNSON, D.M., et BOYES-BREAM, P. (1976). Basic objects in natural categories. *Cognitive Psychology*, 8, 382-439.
- ROSENTHAL, J.A. et RESNICK, L-B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 66, 817-825.
- SOPHIAN, C. (1991). Le nombre et sa genèse avant l'école primaire. Comment s'en inspirer pour enseigner les mathématiques. In J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (éds.), *Les chemins du nombre* (pp.35-58). Lille: Presses universitaires.
- STEFFE, L.P. (1991). Stades d'apprentissage dans la construction de la suite des nombres. In J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (éds.), *Les chemins du nombre* (pp. 113-132). Lille: Presses universitaires.
- VERGNAUD, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.
- VERGNAUD, G. (1991). L'appropriation du concept de nombre: un processus de longue haleine. In J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (éds.), *Les chemins du nombre* (pp.271-282). Lille: Presses universitaires.
- VYGOTSKY, L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge: MIT Press.
- ZIARKO, H. (1992). *Effets de la typicité des concepts et de la structure du texte sur la compréhension de textes taxonomiques par les lecteurs experts et non-experts de sixième année du primaire*. Thèse de doctorat, Université de Montréal.
- ZIARKO, H. et TARDIF, R. Typicité des concepts et rappel de textes taxonomiques en 6^e année du primaire. (à paraître)

APPENDICE A

Matériel expérimental

Épreuve d'inclusion des classes (fleurs et perles)

EPREUVE D'INCLUSION DES CLASSES (FLEURS)

Présentation:

Faire nommer les fleurs et leurs couleurs. S'assurer de la compréhension de la grande classe des "fleurs" en demandant à l'enfant s'il connaît d'autres fleurs.

Schéma d'interrogatoire:

Question 1: Y a-t-il dans ce bouquet plus de marguerites ou plus de fleurs?

_____ plus de marguerites

_____ plus de fleurs

Justification 1: Comment le sais-tu?

Question 2: Il y a deux petites filles qui voudraient faire des bouquets. L'une veut d'abord un bouquet avec des marguerites. Ensuite, elle me les rend. L'autre voudrait faire son bouquet avec les fleurs. Quel bouquet sera le plus gros?

_____ celui de marguerites

_____ celui de fleurs

Question 3: Si je te donne les marguerites, qu'est-ce qu'il me reste dans le bouquet?

_____ les roses

_____ les fleurs

Question 4: Si je te donne les fleurs, qu'est-ce qu'il me reste dans le bouquet?

_____ les marguerites

_____ les roses

Question 5: Dans ce bouquet y a-t-il plus de marguerites ou plus de fleurs?

_____ de marguerites

_____ de fleurs

Justification 2: Comment le sais-tu?

Question 6: Si l'enfant réussit...Qu'est-ce que tu crois: dans le monde, est-ce qu'il a plus de marguerites ou plus de fleurs?

_____ de marguerites

_____ de fleurs

Justification 3: Pourquoi?

EPREUVE D'INCLUSION DES CLASSES
(COMPOSITION ADDITIVE DES CLASSES DE PERLES)

Présentation:

Montrer les 18 perles à l'enfant et l'amener à constater toutes les perles sont en plastique.

Schéma d'interrogatoire:

Question 1: Peux-tu mettre en tas toutes les perles qui vont ensemble?

(Puis...) Y a-t-il plus de perles en plastique ou plus de perles jaunes?

_____ plus de perles en plastique

_____ plus de perles jaunes

Justification 1: Pourquoi?

Si l'enfant répond: plus de perles jaunes ou s'il ne peut expliquer sa réponse...passez aux questions suivantes.

question 2: Un collier fait avec les perles en plastique aurait quelle couleur?

Un collier fait avec les perles jaunes aurait quelle couleur?

Alors, quel collier serait le plus long, celui qu'on pourrait faire avec les perles en plastique ou avec les perles jaunes?

Justification 2: Pourquoi dis-tu... (reprendre la formule utilisée par l'enfant)?

Si l'enfant se corrige et dit que c'est le collier avec les perles en plastique qui sera le plus long, lui demander à nouveau:

Question 3: Alors, dis-moi, est-ce qu'il y a plus de perles en plastique ou plus de perles jaunes?

_____ plus de perles en plastique

_____ plus de perles jaunes

Justification 3: Pourquoi dis-tu... (reprendre la formule utilisée par l'enfant)?

Si l'enfant ne se corrige pas et persiste à dire le collier de perles jaunes sera le plus long, lui demander:

Question 4: Est-ce qu'elles sont toutes jaunes, les perles?

Est-ce qu'elles sont toutes en plastique, les perles?

Si je prenais toutes les perles jaunes, est-ce qu'il en resterait?

Si je prenais toutes les perles en plastique, est-ce qu'il en resterait?

Alors, quel collier serait le plus long, celui qu'on pourrait faire avec les perles en plastique ou celui qu'on pourrait faire avec les perles jaunes?

_____ ... avec les perles en plastique

_____ ... avec les perles jaunes

Justification 4: Pourquoi dis-tu... (reprendre la formule utilisée par l'enfant)?

Si l'enfant se corrige et dit que c'est le collier de perles en plastique qui sera le plus long, lui poser à nouveau la question...

Alors, est-ce qu'il y a plus de perles en plastique ou plus de perles jaunes?

_____ plus de perles en plastique

_____ plus de perles jaunes

Pourquoi dis-tu... (reprendre la formule utilisée par l'enfant)?

Si l'enfant ne se corrige pas et persiste à dire que le collier de perles jaunes sera le plus long, lui dire:

Mets ensemble toutes les perles qu'on prendrait pour faire un collier de perles jaunes.

Mets ensemble toutes les perles qu'on prendrait pour faire un collier de perles en plastique.

Si, à la dernière question, l'enfant rassemble toutes les perles (jaunes et vertes), lui demander:

Alors, quel collier serait le plus long, celui avec des perles en plastique ou celui avec des perles jaunes?

_____ plus de perles en plastique

_____ plus de perles jaunes

Pourquoi dis-tu... (reprendre la formule utilisée par l'enfant)?

Si, au contraire, l'enfant désigne seulement les perles jaunes, lui demander:

Seulement celles-là?

Pourquoi?

Mais les autres perles, elles sont aussi en plastique?

Alors, quel collier serait le plus long, celui avec des perles en plastique ou celui avec des perles jaunes?

_____ avec les perles en plastique

_____ avec les perles jaunes

Pourquoi dis-tu... (reprendre la formule utilisée par l'enfant)?

CORRECTION

ÉPREUVE D'INCLUSION DES CLASSES (FLEURS)

Stade 1

Ce stade est caractérisé par l'incompréhension de la relation d'inclusion. Sitôt que l'enfant raisonne sur *l'une des parties*, la *totalité* comme telle se *dissout* en transférant les qualités sur l'autre partie seulement.

L'enfant ne parvient pas à penser simultanément le tout B et les parties A et A': *il répond qu'il y a plus de marguerites que de fleurs.*

Stade 2

Ce stade est caractérisé par la découverte *intuitive*, et non déductive, de la réponse juste, c'est-à-dire qu'il y a tâtonnement avant la construction correcte: il ne comprend pas si "tout A (marguerites) est tout B (fleurs); "tout B (fleurs) n'est pas A (marguerites)". *Le tout est une réunion des parties.*

Stade 3

L'enfant comprend d'emblée, spontanément, que la classe incluante B est plus nombreuse que la classe A, parce qu'il *se place d'avance au point de vue de la composition additive* ($B = A + A'$ et $A = B - A'$). Il n'y a ni hésitation ni tâtonnement.

CORRECTION
ÉPREUVE D'INCLUSION
(COMPOSITION ADDITIVE DES CLASSES DE PERLES)

Stade 1

Ce stade est caractérisé par l'incompréhension de la relation d'inclusion. Sitôt que l'enfant raisonne sur *l'une des parties*, la *totalité* comme telle se *dissout* en transférant les qualités sur l'autre partie seulement.

L'enfant ne parvient pas à penser simultanément le tout B et les parties A et A': *il répond qu'il y a plus de perles jaunes.*

Stade 2

Ce stade est caractérisé par la découverte *intuitive*, et non déductive, de la réponse juste, c'est-à-dire qu'il y a tâtonnement avant la construction correcte: l'enfant commence par répondre comme au stade premier, mais, au cours de l'interrogatoire, *il finit par conclure que les deux classes se recouvrent.*

Stade 3

L'enfant comprend d'emblée, spontanément, que la classe incluant B est plus nombreuse que la classe A, parce qu'il *se place d'avance au point de vue de la composition additive* ($B = A + A'$ et $A = B - A'$). Il n'y a ni hésitation ni tâtonnement.

**Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes
(fleurs et perles)**

Tableau 3

Résultats obtenus par les 44 sujets à
l'épreuve d'inclusion des classes (fleurs)

Sujets	Stades d'inclusion	Points obtenus
1	3	12
2	2	6
3	3	12
4	2	6
5	3	12
6	2	6
7	1	0
8	3	12
9	2	6
10	3	12
11	1	0
12	3	12
13	1	0
14	1	0
15	2	6
16	2	6
17	2	6
18	3	12
19	2	6
20	3	12
21	1	0
22	1	0
23	1	0
24	1	0
25	2	6
26	3	12
27	3	12
28	3	12
29	3	12
30	2	6
31	1	0
32	1	0
33	2	6
34	1	0
35	3	12
36	1	0
37	2	6
38	1	0

39	3	12
40	3	12
41	2	6
42	3	12
43	2	6
44	1	0

Tableau 4

Résultats obtenus par les 44 sujets à
l'épreuve d'inclusion des classes (perles)

Sujets	Stades d'inclusion	Points obtenus
1	3	12
2	2	6
3	3	12
4	1	0
5	3	12
6	2	6
7	2	6
8	3	12
9	2	6
10	3	12
11	2	6
12	3	12
13	2	6
14	1	0
15	2	6
16	3	12
17	3	12
18	3	12
19	3	12
20	3	12
21	1	0
22	1	0
23	2	6
24	1	0
25	2	6
26	2	6
27	3	12
28	3	12
29	3	12
30	2	6
31	2	6
32	1	0
33	3	12
34	2	6
35	2	6
36	2	6
37	3	12
38	3	12

39	3	12
40	3	12
41	3	12
42	3	12
43	1	0
44	1	0

Recherche de prototypes

Tableau 5

Liste des exemplaires cités pour la catégorie des "fleurs"
par 43 sujets et ordonnés selon la fréquence de citation

	Exemplaire	Nombre de citations	Pourcentage
1.	Tulipe	37	86,05
2.	Marguerite	37	86,05
3.	Rose	30	69,77
4.	Pissenlit	24	55,81
5.	Lilas	9	20,93
	Jonquille	7	16,28
	Pivoine	6	13,95
	Pétunia	3	6,98
	Pensée	3	6,98
	Quatre-heures	3	6,98
	Violette	3	6,98
	Géranium	2	4,65
	Bégonia	2	4,65
	Gueule-de-loup	2	4,65
	Muguet	2	4,65
	Dalia	2	4,65
	Bouton-d'or	2	4,65
	Tournesol	1	2,33
	Iris	1	2,33

Impatiente	1	2,33
Véronique	1	2,33

Tableau 6

Liste des exemplaires cités pour la catégorie des "arbres"
par 40 sujets et ordonnés selon la fréquence de citation

	Exemplaire	Nombre de citations	Pourcentage
1.	Érable	38	95,00
2.	Sapin	37	92,50
3.	Bouleau	30	75,00
4.	Pommier	28	70,00
5.	Chêne	23	57,50
	Épinette	18	45,00
	Bananier	16	40,00
	Pin	10	25,00
	Cerisier	10	25,00
	Cèdre	9	22,50
	Saule	8	20,00
	Oranger	7	17,50
	Cocotier	5	12,50
	Poirier	4	10,00
	Prunier	3	7,50
	Palmier	3	7,50
	Marronnier	2	5,00
	Hêtre	2	5,00
	Peuplier	2	5,00

Orme	2	5,00
Rosier	2	5,00
Frêne	1	2,50
Merisier	1	2,50
Noyer	1	2,50
Framboisier	1	2,50

Problèmes soumis en vue de l'analyse quasi-expérimentale

Problèmes additifs

s1,c1,p1,o1

François et Luc sont fleuristes.

François doit 145 jonquilles à Luc mais Luc doit 196 marguerites à François. Combien de fleurs doit-il de plus?

s1,c1,p1,o2

Paul et Marie sont fleuristes.

Paul doit 187 jonquilles à Marie mais Marie doit 176 marguerites à Paul. Combien de fleurs doit-elle de moins?

s1,c1,p2,o1

Philippe et Anne sont fleuristes.

Philippe devait 168 fleurs à Anne. Il lui remet des roses. Philippe ne lui doit plus alors que 154 marguerites. Combien de roses Philippe a-t-il remises à Anne?

s1,c1,p2,o2

Philippe et Anne sont fleuristes. Philippe participe au "Festival des fleurs" de sa ville. Il demande l'aide de son amie Anne.

Philippe devait 176 marguerites à Anne. Il lui emprunte aussi des roses et il doit maintenant 198 fleurs à Anne. Combien de roses Philippe a-t-il empruntées à Anne.

s1,c2,p1,o1

Le zoo de Québec organise un "Festival des oiseaux" pour célébrer l'arrivée de l'été. Il reçoit l'aide du zoo de Granby.

Le zoo de Québec doit 138 pic-bois au zoo de Granby mais le zoo de Granby doit 159 corneilles au zoo de Québec. Combien d'oiseaux le zoo de Granby doit-il de plus?

s1,c2,p1,o2

Le zoo de Saint-Félicien et le zoo de Québec participent à un échange d'oiseaux pour enrichir leurs collections.

Le zoo de Saint-Félicien doit 178 hirondelles au zoo de Québec mais le zoo de Québec doit 164 pigeons au zoo de Saint-Félicien. Combien le zoo de Québec doit-il de moins?

s1,c2,p2,o1

Pour marquer l'arrivée de l'été, le zoo de Québec organise à chaque année le "Festival des oiseaux". Il a reçu l'aide du zoo de Granby.

Le zoo de Québec doit 198 oiseaux au zoo de Québec. Le zoo de Québec remet des corneilles au zoo de Granby. Le zoo de Québec ne lui doit plus alors que 137 hirondelles. Combien de corneilles le zoo de Québec a-t-il remises au zoo de Granby?

s1,c2,p2,o2

Pour enrichir leurs collections d'oiseaux, le zoo de Québec et le zoo de Granby font des échanges.

Le zoo de Québec devait 159 pic-bois au zoo de Granby. Le zoo de Québec lui emprunte aussi des corneilles. Le zoo de Québec doit maintenant 187 oiseaux au zoo de Granby. Combien de corneilles le zoo de Québec a-t-il empruntées au zoo de Granby?

s2,c3,p1,o1

Jean et Marie jouent aux billes aux récréations.

Jean doit 145 billes à Marie mais Marie doit 196 billes à Jean. Combien de billes Marie doit-elle de plus?

s2,c3,p1,o2

Paul et Marie jouent aux billes aux récréations.

Paul doit 187 billes à Marie mais Marie doit 176 billes à Paul. Combien de billes Marie doit-elle de moins?

s2,c3,p2,o1

Philippe et Anne jouent aux billes aux récréations.

Philippe devait 168 billes à Anne. Philippe lui remet des billes et il ne doit plus alors que 154 billes à Anne. Combien de billes Philippe a-t-il remises à Anne?

s2,c3,p2,o2

Philippe et Anne participent à un tournoi de billes à l'école.

Philippe devait 176 billes à Anne. Il lui emprunte encore des billes et il doit maintenant 198 billes à Anne. Combien de bille Philippe a-t-il empruntées à Anne?

s2,c4,p1,o1

Pierre et Julie font des collections de gommes à effacer. Ils font aussi des échanges pour enrichir leur collection.

Pierre doit 167 gommes à effacer à Julie mais Julie doit 184 gommes à effacer à Pierre. Combien de gommes à effacer Julie doit-elle de plus?

s2,c4,p1,o2

Anne-Marie et Maude collectionnent les gommes à effacer. Elles font des échanges pour embellir leurs collections.

Anne-Marie doit 178 gommes à effacer à Maude mais Maude doit 164 gommes à effacer à Anne-Marie. Combien Maude doit-elle de gommes à effacer de moins?

s2,c4,p2,o1

Marie et Laurence font des collections de gommes à effacer. Elles font des échanges pour embellir leurs collections.

Marie doit 198 gommes à effacer à Laurence. Marie remet des gommes à effacer à Laurence. Marie ne doit plus alors que 137 gommes à effacer. Combien de gommes à effacer Marie a-t-elle remises à Laurence?

s2,c4,p2,o2

Frédéric et Maude collectionnent les gommes à effacer. Ils font des échanges pour embellir leurs collections.

Frédéric devait 159 gommes à effacer à Maude. Frédéric emprunte encore des gommes à effacer à Maude et il lui doit maintenant 187 gommes à effacer. Combien de gommes à effacer Frédéric a-t-il empruntées à Maude?

Exemples de solutions possibles

Philippe et Anne sont des fleuristes. Philippe participe au "Festival des fleurs" de sa ville. Il demande l'aide de son amie Anne.

Philippe devait 176 marguerites à Anne. Il lui emprunte aussi des roses et il doit maintenant 198 fleurs à Anne. Combien de roses Philippe a-t-il empruntées à Anne?

exemples de solutions possibles:

$$198 - 176 = 22$$

réponse: 22 roses

ou

$$176 + ? = 198$$

$$176 + 22 = 198$$

réponse: 22 roses

(1 point pour la démarche de résolution et le calcul numérique et 2 points pour l'identification de l'exemplaire pour un total de **3 points**)

$$198 - 176 = 22$$

réponse: 22 fleurs

ou

$$176 + ? = 198$$

$$176 + 22 = 198$$

réponse: 22 fleurs

(1 point pour la démarche de résolution et le calcul numérique et 1 point pour l'identification de la catégorie surordonnée pour un total de **2 points**)

Exemple d'un protocole

Philippe et Anne sont fleuristes. Philippe participe au "Festival des fleurs" de sa ville. Il demande l'aide de son amie Anne.

Philippe devait 176 marguerites à Anne. Il lui emprunte aussi des roses et il doit maintenant 198 fleurs à Anne. Combien de roses Philippe a-t-il empruntées à Anne.

Ta démarche:

Ta réponse: _____

Philippe et Anne sont fleuristes.

Philippe devait 168 fleurs à Anne. Il lui remet des roses. Philippe ne lui doit plus alors que 154 marguerites. Combien de roses Philippe a-t-il remises à Anne?

Ta démarche:

Ta réponse: _____

Paul et Marie sont fleuristes.

Paul doit 187 jonquilles à Marie mais Marie doit 176 marguerites à Paul. Combien de fleurs doit-elle de moins?

Ta démarche:

Ta réponse: _____

François et Luc sont fleuristes.

François doit 145 jonquilles à Luc mais Luc doit 196 marguerites à François.
Combien de fleurs doit-il de plus?

Ta démarche:

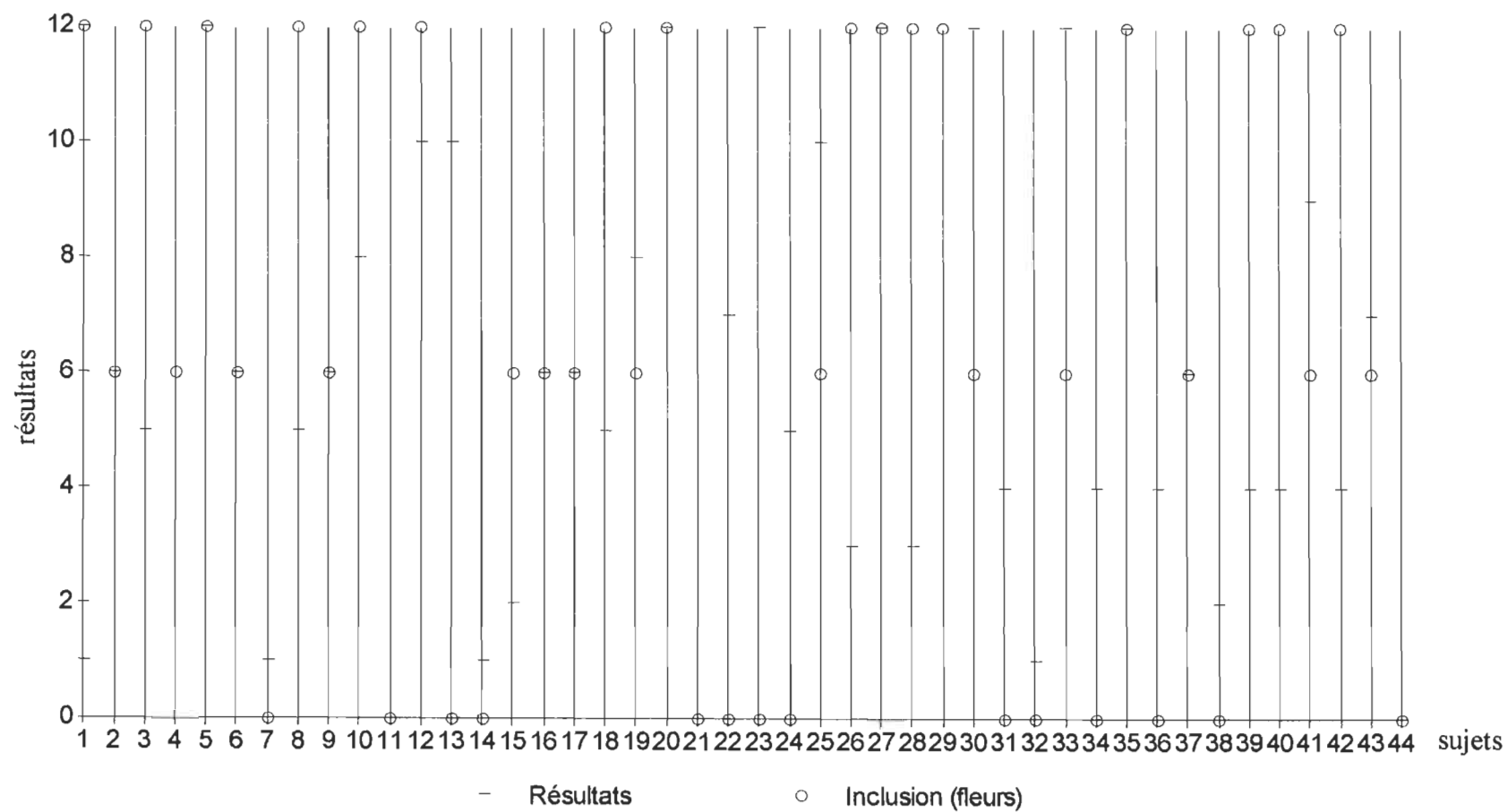
Ta réponse: _____

APPENDICE B

Résultats comparés de l'épreuve d'inclusion des classes et de l'expérimentation

Figure 5

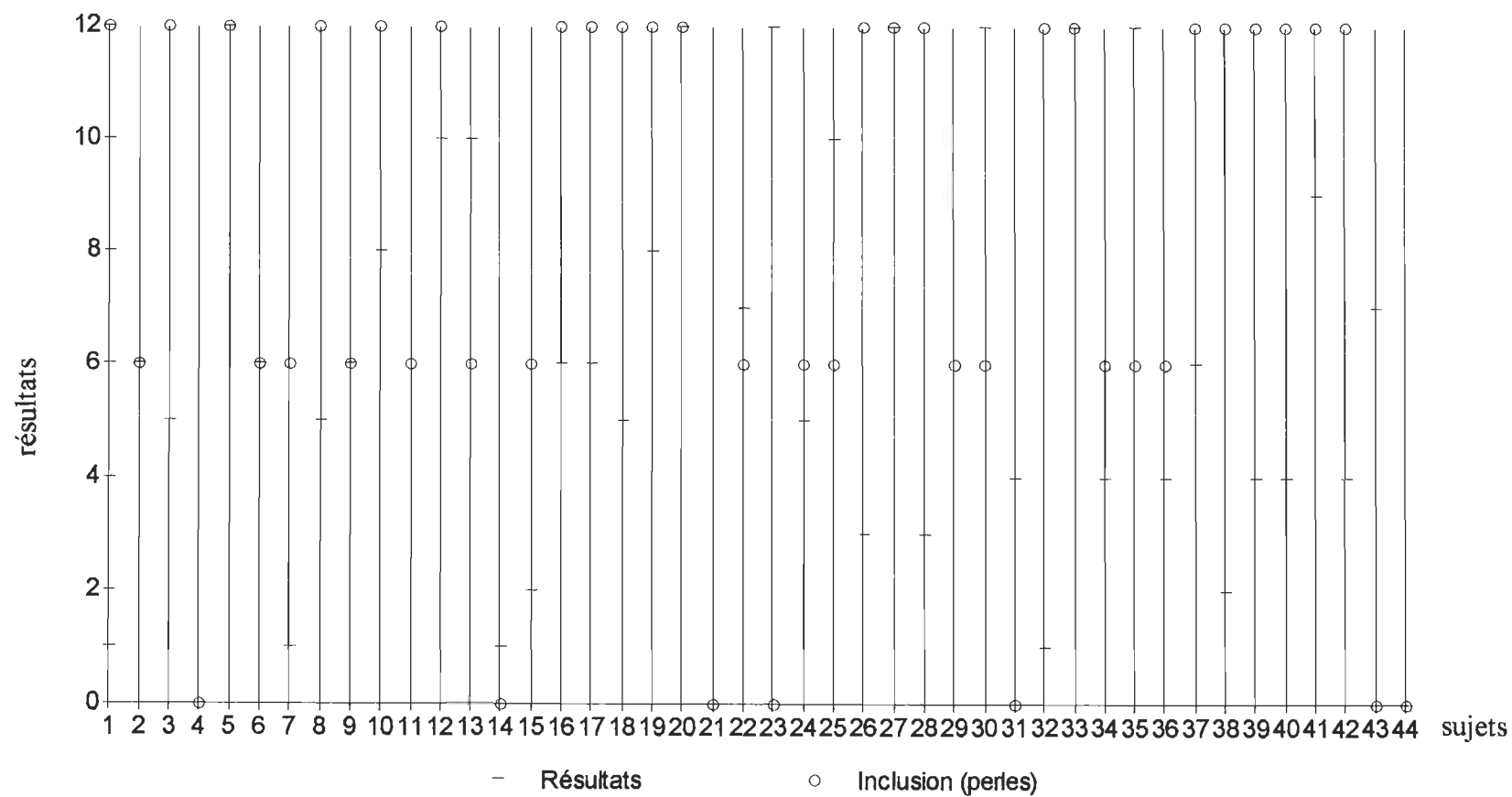
Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (fleurs)
et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude fleurs/billes



Les sujets 1 à 22 ont traité des problèmes de fleurs; les sujets 23 à 44 ont traité des problèmes de billes.

Figure 6

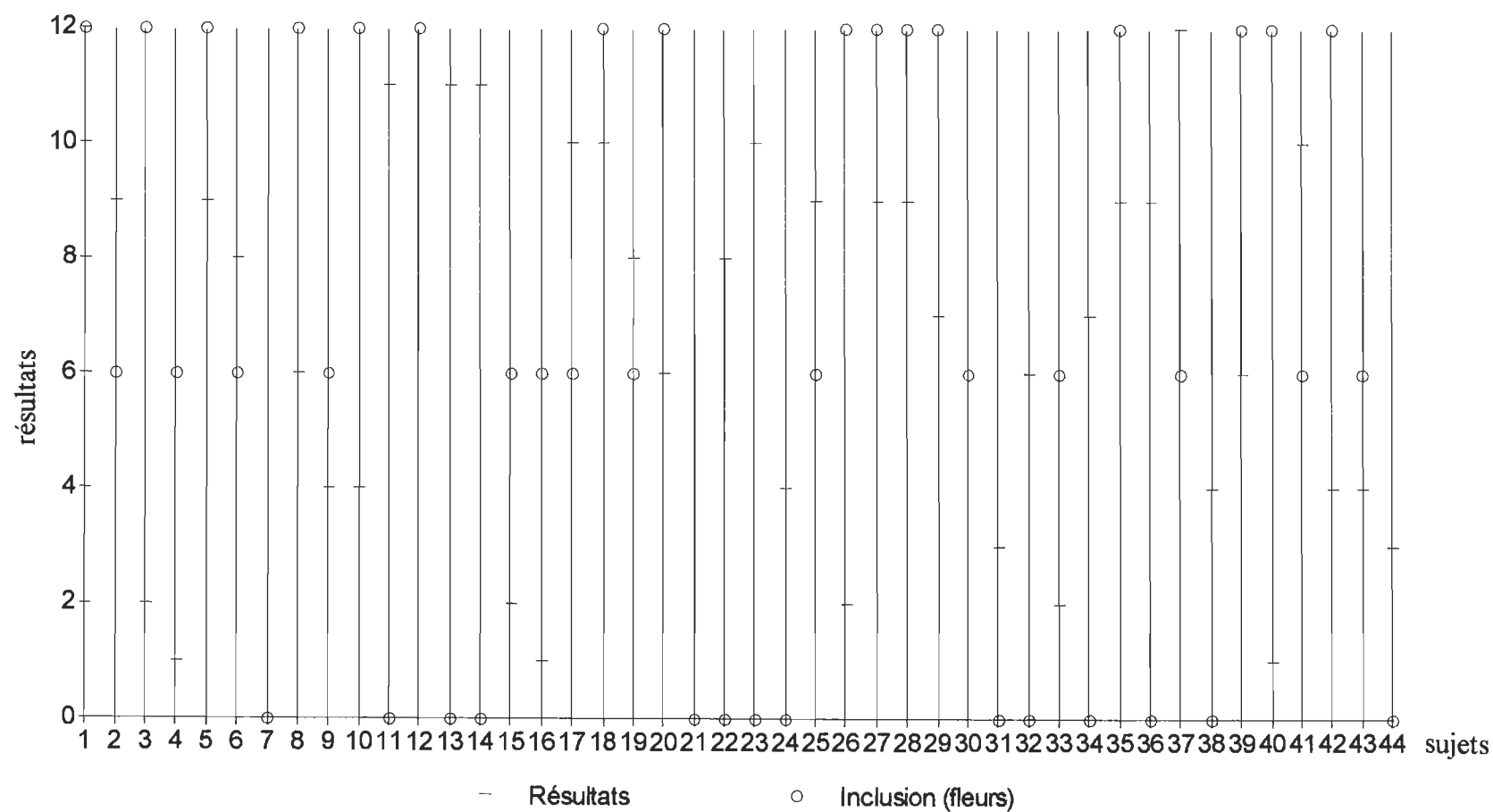
Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (perles)
et à la résolution des problèmes additifs, pour l'étude fleurs/billes



Les sujets 1 à 22 ont traité des problèmes de fleurs; les sujets 23 à 44 ont traité des problèmes de billes.

Figure 7

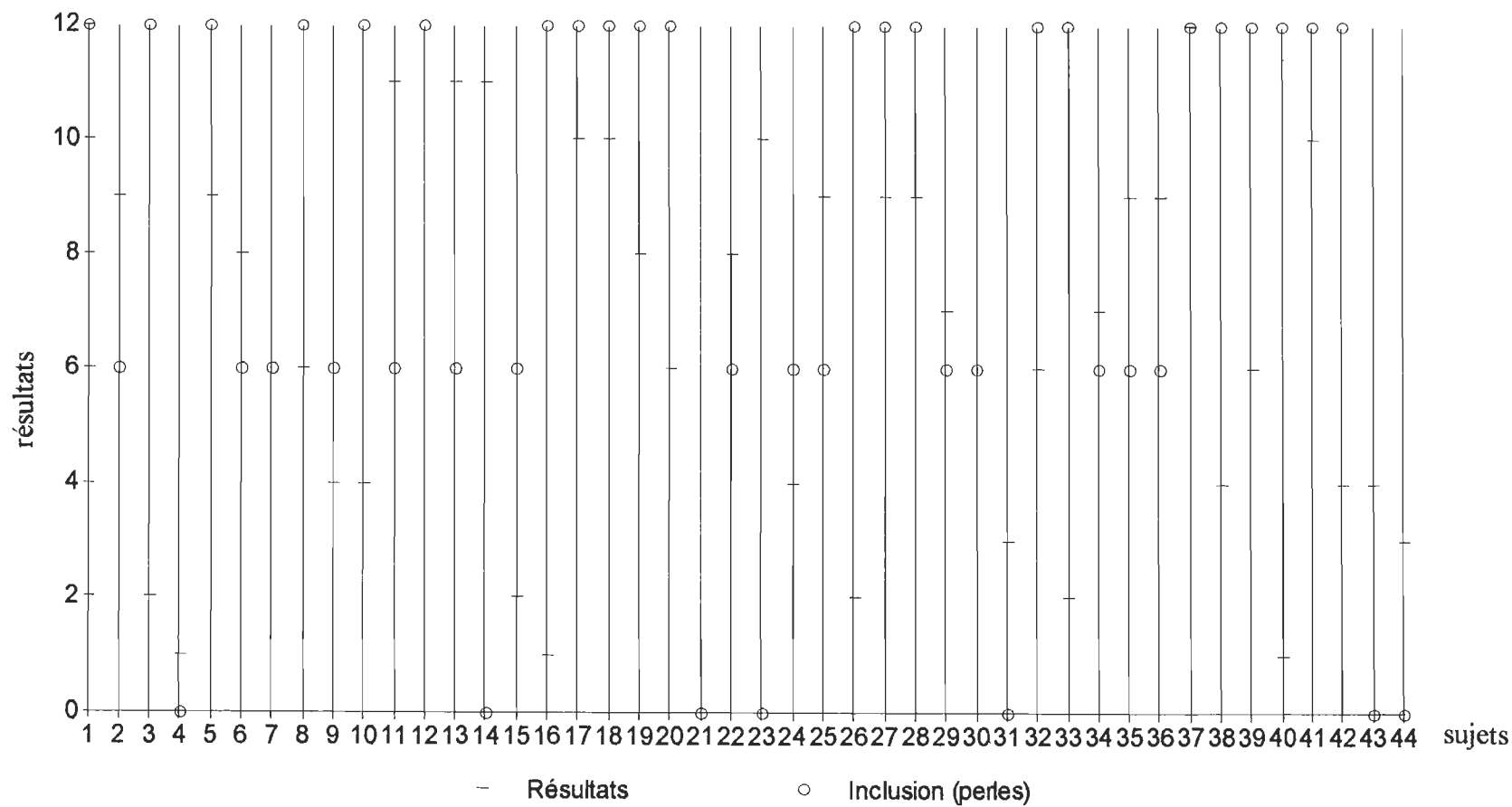
Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (fleurs)
et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude oiseaux/gommes à effacer



Les sujets 1 à 22 ont traité des problèmes de fleurs; les sujets 23 à 44 ont traité des problèmes de billes.

Figure 8

Résultats obtenus à l'épreuve d'inclusion des classes (perles)
et la résolution des problèmes additifs, pour l'étude oiseaux/gommes à effacer



Les sujets 1 à 22 ont traité des problèmes de fleurs; les sujets 23 à 44 ont traité des problèmes de billes.